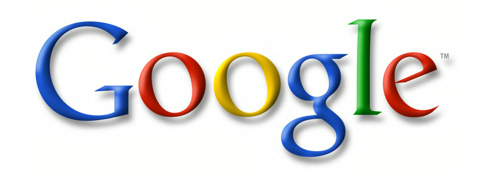



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE



Studien

zur

Metaphysik der Differentialrechnung

von

Prof. Dr. Freyer.

(Besonderer Abdruck aus dem Osterprogramm der Klosterschule zu Ilfeld a. H.)

In Kommission bei W. Weber

in Berlin W., Markgrafenstrafse 46.

1883.

Studien zur Metaphysik der Differentialrechnung.

> Erst wenn wir das Seiende werden sehen, hört das Seiende auf uns anzustarren, und erst dadurch wird das Dunkele in das Licht des Bewusstseins gezogen.
>
> Trendelenburg, Logische Untersuchungen I. pag. 220.

Zu den Fragen, welche auf den Grenzgebieten zwischen den einzelnen Wissenschaften und der Metaphysik liegen, gehört auch die nach der inneren Möglichkeit der Differential- und Integralrechnung. Dafs sie beantwortet werden mufs durch die Erörterung der Kategorien des Kontinuierlichen und Diskontinuierlichen, des Extensiven und Intensiven, des Mafses und der Zahl etc., zeigen uns die ersten Seiten fast jedes Lehrbuchs dieser Disciplinen.

Sind aber die Untersuchungen hierüber nicht längst abgeschlossen, giebt es noch Punkte, an denen der Zweifel haftet, hat sich noch nicht aus den Erörterungen hierüber eine Meinung herausgearbeitet, die als ein unverrückbares Fundament gelten kann und somit diesem Teile der Mathematik den Unterbau sichert, der ihn zur Wissenschaft macht? —

Ich führe zunächst das Zeugnis an, mit welchem Baumann*) seine umfassenden Referate über die ursprünglichen Darstellungen der Infinitesimalrechnung und die Angriffe gegen dieselbe abschliefst.

„So verwerfen wir die logische und metaphysische Rechtfertigung, welche Leibniz dem Calcül gegeben hat, aber diesen Calcül selbst tasten wir nicht an. Wir halten ihn für eine geniale Erfindung, die sich praktisch bewährt hat, für eine Kunst mehr als eine Wissenschaft; rein logisch ist er nicht zu construiren, aus den Elementen der gewöhnlichen Mathematik ergiebt er sich nicht“ etc.

Und: „In ihren höheren Teilen ist die (mathematische) Wissenschaft aber ein construirendes Versuchen, vielfach beeinflufst auch von anderen Betrachtungen, hier z. B. nicht von rein arithmetischen, sondern von geometrischen und mechanischen; diese letzteren Betrachtungen legten den Calcül nahe, man versuchte ihn und fand ihn bewährt; so entdeckte man ihn halb und halb erfand man ihn, und darin besteht seine Rechtfertigung“. —

Es schliefsen somit die eingehenden Untersuchungen Baumanns doch mit einem negativen Resultate bei aller Anerkennung der genialen Methode und ihrer Ergebnisse. Was logisch nicht zu retten ist, kann einen Anspruch auf Wissenschaft nicht machen. Es bleibt dann ein Rest, der,

*) J. J. Baumann, die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik. 1869. II. pag. 54 ff.

weil nicht frei von inneren Widersprüchen, die ganze Grundlage unsicher macht und es mindestens ungewifs sein läfst, ob in dem errichteten Gebäude der erarbeitete Gewinn genügend geborgen sei.

Diesem Ausspruche Baumanns reihe ich einen von ganz anderer Art an. Ab und zu sind auch in den letzten Jahren, wohl im Zusammenhange mit den Spekulationen über die Anzahl der Dimensionen des Raums, über die physiologischen und psychologischen Bedingungen der Erkennbarkeit desselben gröfsere oder kleinere Schriften [1]) erschienen, die sich auch mit den hierher gehörigen Fragen beschäftigen oder an dieselben anstreifen. Zunächst möge zum Beweise, wie sich gegen die allereinfachsten und sonst unbestrittenen Wahrheiten Stimmen erheben können, folgendes Urteil von Schmitz-Dumont angeführt werden [2]):

„Newton führte den logischen Sprung vom Diskreten zum Stetigen aus, mit Verwendung des Begriffs der Bewegung. Er erreichte damit eine anschauliche Darstellung mathematischer Ausdrücke; durch seine demonstratio ad oculos konnte man sich schon veranlafst fühlen, an die absolute Genauigkeit der Rechnung zu glauben; aber deshalb blieb dieselbe doch ebenso unbewiesen wie unbegriffen".

Weiter: „Es ist alogisch zu sagen: Die Geschwindigkeit, welche ein Punkt an einem gewissen Punkte der Bahn hat, soll ausgedrückt werden durch „Fluxion x"; denn an einem bestimmten Orte der Bahn hat ein Punkt oder Körper gar keine Geschwindigkeit, wie schon die Eleaten wufsten".

Weit entfernt davon, Baumann und Schmitz-Dumont neben einander als gleichgeltende Zeugen aufzustellen, wollte ich mit obigen Citaten nur andeuten, dafs noch genug gezweifelt wird und dafs es oft scheint, als müsse die Arbeit der Jahrhunderte von neuem beginnen, weil den Späteren alles so unsicher erscheint. Es ist nicht gerade nötig, dafs ich mir dem letzteren Werke gegenüber die untenstehende Beurteilung [3]) desselben aneigne; angeführt mag sie werden. —

Es liefsen sich noch andere Zeugnisse [4]) zum Beweise anführen, dafs es nicht ohne Ursache geschieht, wenn die folgenden Blätter sich mit der Metaphysik der Differentialrechnung beschäftigen.

[1]) Die „Metaphysischen Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften auf Grundlage der heliocentrischen Philosophie von A. Bilharz und P. Dannegger; Sigmaringen 1880" habe ich bei Seite legen müssen. Sätze, wie folgende, dafs „wir nur in Tangenten denken können" (pag. 16), dafs „der Raum auf der Zeit senkrecht steht" (pag. 34), dafs „die mathematische Definition $\tang \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ unmittelbar aus der Metaphysik stammt" (pag. 87) u. s. w. sind mir wirklich „zu hoch". —

[2]) Die mathematischen Elemente der Erkenntnifstheorie. 1878. pag. 233.

[3]) Philosophische Monatshefte, XVI. pag. 104. „Der wirre Tanz tollgewordener Begriffe, der in dem Buche nicht selten begegnet, das Spiel mit Worten, denen der Nachweis fehlt, dafs sie überhaupt etwas bedeuten, kann schwerlich Erkenntnifstheorie heifsen".

[4]) Meine in Folgendem enthaltenen Studien waren, was die Anordnung des Ganzen, die Präcisierung des Problems, die Feststellung meiner Grundanschauung betrifft, im Wesentlichen abgeschlossen, als die in ihrem ersten Teile denselben Gegenstand behandelnde Schrift: „Die allgemeine Funktionentheorie von P. Du Bois-Reymond, Th. I. Tübingen 1882" mir zugesandt wurde. — Meine Arbeit würde in ihrem letzten Teile eine andere Gestalt erhalten haben, wenn das Buch einige Monate früher in meine Hände gelangt wäre; denn eine Auseinandersetzung über wesentliche Punkte wäre nötig gewesen. — In einer Beziehung glaube ich diese neueste Schrift über die Differentialrechnung zu ergänzen, da in ihr das Historische, sowohl was die Bemühungen der Mathematiker als auch der Philosophen betrifft, fast ganz fehlt und Du Bois-Reymond auch „von neuem" beginnt. — Einzelne Punkte seiner Darlegungen konnte ich nur noch in Anmerkungen berühren. Jedoch bemerke ich von vornherein, dafs ich mich zu dem Standpunkte seines „Idealisten" bekenne, ohne jede Festsetzung desselben gutzuheifsen. — Von Recensionen des Buches sind mir zwei zu Gesicht gekommen, eine in dem Deutschen Litteraturblatte (1882. pag. 1728.), die andere im Archiv d. Mathematik u. Physik, LXIX. Heft 1. Die erstere lautete abfällig, die zweite nicht günstig.

Dabei ist zweierlei nötig. — Sollten die Erfinder dieser Methoden die Schwierigkeiten, die der klaren Fixierung der hierher gehörigen Begriffe entgegenstehen, nicht bereits selbst gefühlt und ihnen zu begegnen gesucht haben? Was haben Leibniz und Newton, denen doch wohl niemand ihre Bedeutung in der Philosophie streitig machen dürfte, gethan, um ihre Entdeckung zu sichern? Die Akten werden daher nochmals darauf hin zu prüfen sein, ob und wie weit sie uns die treibenden Gedanken offenbaren. — Ebenso ist es wichtig, die Meinungen späterer bedeutender Mathematiker kennen zu lernen, soweit sie die principiellen Fragen behandeln. — Dann erstrecken sich die Baumannschen Referate nur bis zum Anfange der neuesten Philosophie; mit Kant hören seine Berichte auf. Es wird zu untersuchen sein, ob nachkantische Darstellungen der Metaphysik sich mit der Lösung der Schwierigkeiten beschäftigen.

Zunächst aber ist eine kurze Orientierung über das Objekt der Untersuchung selbst vorauszuschicken. Nicht allen, die an philosophischen Spekulationen Interesse haben, dürfte bei der „Teilung der Arbeit“ der Gegenstand, um den es sich handelt, geläufig sein. Begegneten doch Hegeln sachliche Irrtümer. — Den Vorwurf, längst bekannte Dinge vorzuführen, mufs ich mir hierbei von Mathematikern schon gefallen lassen, wenn ich Nichtmathematiker für ein Problem, dessen Geschichte von den Eleaten bis in die neueste Zeit reicht, interessieren möchte. —

I. Der Gegenstand der Differentialrechnung.

In thunlichster Kürze sei also eine Reihe Erläuterungen über die Aufgabe vorausgeschickt. — Sind zwei oder mehrere veränderliche Gröfsen durch ein Gesetz, das vielleicht in einer Gleichung seine Fixierung bereits gefunden, so unter einander verbunden, dafs einem bestimmten Werte der einen ein oder mehrere bestimmte Werte der anderen entsprechen, so heifst, indem man die eine dieser Gröfse (x) als unabhängig, die andere (y) als abhängig ansieht, die letztere eine Funktion der ersteren, $y = f(x)$. Ist z. B. dieser Zusammenhang durch einfache arithmetische Relationen, wie in

$$y^2 = 2\,px$$

$$y = \frac{gx^2}{2}$$

$$y^2 + x^2 = r^2,$$

oder durch trigonometrische Beziehungen wie $y = \cos x$ u. s. w. gegeben, wo die konstanten Gröfsen durch p, g, r, die variabelen durch x, y bezeichnet sind, so sind die y Funktionen von den Gröfsen x. — Ebenso können variabele Gröfsen von mehreren variabelen abhängig sein, wie in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Die Gesetze, denen im Geometrischen die einzelnen Punkte einer Kurve oder Fläche gehorchen, können durch solche Funktionen dargestellt werden, wenn die variabelen Gröfsen die Koordinaten der einzelnen Punkte bedeuten. So ist z. B. $y^2 = 2\,px$ die Gleichung, welche die Punkte einer Parabel festlegt, wenn die Zahlen für x die Abscissen, die für y die Ordinaten messen. —

Die Frage, welche in der Differentialrechnung bei der Untersuchung der Funktionen immer und immer wiederkehrt, ist, wenn wir der Einfachheit wegen zunächst zwei Variabele annehmen, folgende:

Welche Veränderung erleidet y, wenn x sich ändert? —

Die Untersuchung gehört also dem Werden an. Betrachte ich die Kurve nur als den Ort der Punkte x y, nur als eine Mannigfaltigkeit von Punkten, so ist von keiner Differentialrechnung die

Rede. Von vornherein liegen dem Probleme die Fragen, bei denen es sich nur um diskrete Gröfsen handelt, fern.

Wir setzen demnach Stetigkeit der Funktionen voraus, d. h. nach der feststehenden Definition nehmen wir an, dafs wenn x_1 und x_2 zwei Werte von x sind, dieselben so nahe an einander gebracht werden können, dafs die ihnen entsprechenden Werte y_1 und y_2 sich um eine Gröfse unterscheiden, die kleiner gemacht werden kann, als eine noch so kleine angebbare bestimmte Gröfse.

Dieser Begriff der Stetigkeit ist mithin aufs engste verbunden mit dem der unendlichen Teilbarkeit; er wird in den recipierten Darstellungen den mathematischen Erörterungen als Princip vorangestellt und ist von der gröfsten Bedeutung für das Problem.

Lassen wir nun, um die Gedanken bestimmter zu fassen, wenn z. B. die Gleichung $y = 2x^2 - 3$ besteht, die Veränderungen des unabhängigen x in endlichen äquidistanten Intervallen vor sich gehen, so entsprechen den folgenden Werten von x:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

nachstehende von y

$$-3 \quad -1 \quad 5 \quad 15 \quad 29 \quad 47.$$

Damit darf man sich aber nicht begnügen. — Man sieht, dafs in diesem Beispiele die Werte von y ganz andere Intervalle haben als die von x und dafs dieselben auch unter einander nicht gleich sind. Das Wachsen von y, während x von 1 bis 2 zunimmt, ist also ein anderes, wie wenn x von 2 bis 3 wächst. Was geschieht nun innerhalb eines solchen Intervalles? Ein Verengen der Intervalle der Variabelen x würde die Frage nur weiter zurückdrängen, ohne irgend einen näheren Aufschlufs zu geben; denn denkt man sich die Einheit, mit welcher gemessen wird, vergröfsert, so wachsen die Intervalle und der „Empiriker" ist so klug wie zuvor. Man erfährt immer nur, „dafs" sich der Wert von y mit der Änderung des x auch geändert hat. — Es giebt aber eine ganze Reihe von Untersuchungen, wie die Bestimmung der Tangenten, des Steigens der Kurven, der kleinsten und gröfsten Werte etc., bei denen es darauf ankommt, das „wie" kennen zu lernen, die Gesetze des Werdens zu begreifen. —

Da aber das Werden der Gröfsen für uns zunächst nur innerlich anschaulich wird, indem wir eine Gröfse messen, so formuliert sich die Frage nach der Veränderung von y bei einer simultanen Veränderung von x weiter zu der Frage, wie oft die Veränderung von x in der des y enthalten sei. Man sucht also, indem man die erstere als das Mafs annimmt, die Mafszahl, durch deren Multiplikation mit der ersteren man die zweite erhält. In der Differentialrechnung läfst man zunächst x um eine endliche Gröfse, um das Inkrement Δx wachsen; es wachse infolge dessen die abhängige Variabele y, die eine Funktion von x ist, f(x), um Δy: so besteht sowohl die Gleichung

$$y = f(x)$$

als auch: $$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

mithin: $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

und für endliche Intervalle ist der Quotient der Inkremente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dieser Quotient, der das Verhältnis der Zunahmen angiebt, der also, da er zunächst eine Mafszahl ist, eine ganz quantitative Bedeutung hat, wird aber noch nicht das ausdrücken, was man sucht, nicht das Verhältnis der werdenden Inkremente, sondern das der gewordenen, so lange man sprungweise Änderungen der Variabelen annimmt. Die Methode der Differentialrechnung läfst nun Δx und infolge dessen, da es sich zunächst um stetige Funktionen handelt, auch Δy unendlich klein werden, macht, indem sie die endlichen Inkremente also einem Vorgange des Verschwindens

unterwirft, die Differenzen zu Differentialen (die Bezeichnung ist für diesen Fall dx, dy), und bringt diesen Prozeſs zum Abschluſs, um der Wahrheit nicht nur empirisch näher zu kommen, sondern um sie in aller Strenge zu **erreichen**. Sie beweist allerdings mathematisch, daſs in der Gleichung, die den Abschluſs dieses Prozesses ausdrückt:

$$\frac{dy}{dx} = \text{limes}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{limes}\ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

im Allgemeinen ein solcher limes, ein solcher Grenzwert, wirklich existiert; aber löst sie damit auch alle Schwierigkeiten des Verständnisses und läſst sie uns den Vorgang ganz durchschauen?

Ist jenseits der Mathematik noch die Frage berechtigt, wie ein solcher limes entsteht und möglich ist? —

Es drängen sich nämlich mehrere Fragen auf. —

Was heiſst unendlichklein? — Ist das verschwindende Inkrement wirklich verschwunden, also der gewollte Abschluſs erreicht, so ist also $dx = 0$, also ist $f(x + dx)$ ganz dasselbe Quantum wie $f(x)$, also ist $dy = 0$ und der Differentialquotient giebt $\frac{0}{0}$. Wie kann aber zwischen Gröſsen, die Null sind, ein Verhältnis stattfinden*)? — Es steht fest, daſs mit Null die Extension aufhört; man kann nicht davon reden, daſs die eine Null von einer anderen unterschieden sei, denn mit dem „Unterschiedensein" denkt man an Subtraktion. Aber kann man behaupten, daſs eine Null in einer andern Null eine endliche Anzahl von Malen enthalten sein könne? —

Ist also ein solches Inkrement eine Quantität oder nicht? Ist es eine Quantität, so hat man nicht erreicht, was man wollte, man bleibt in endlichen Intervallen und begeht Fehler, wenn auch noch so kleine, die nur den Empiriker vielleicht nicht stören; — ist es eine Null, wie ist dann der Gedanke der quantitativen Bedeutung eines Quotienten zweier Nullen zu fassen? — Kann denn dx ein Drittes sein? Verstöſst die ganze Methode nicht gegen das oberste Prinzip aller Logik, gegen das Identitätsgesetz und seine unmittelbare Konsequenz, das principium exclusi tertii: A ist entweder B oder non B? —

Diese logischen Schwierigkeiten häufen sich. Diese Differentiale dx dy, diese unendlich kleinen Inkremente, läſst man mit Leibniz im weiteren Verlaufe der Rechnung nicht nur in der Form auftreten, daſs sie zu je zweien in einem Quotienten verbunden erscheinen (dem Differentialquotienten, der Ableitung, $f^1(x)$), sondern man rechnet ohne weiteres mit ihnen, als ob sie endliche Gröſsen wären. So quadriert man sie, um das Bogendifferential zu erhalten, in der Gleichung $ds^2 = dx^2 + dy^2$, so ist, wenn $\varrho = \frac{ds}{d\varphi}$, auch $ds = \varrho \cdot d\varphi$, so ist, wenn $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$, auch $dy = mx^{m-1}\,dx$. — Kann von einem quantitätslosen Subjekte in der Mathematik ein Prädikat — und das geschieht doch in der Gleichung — ausgesagt werden?

Man wendet weiter Differentialquotienten zweiter Ordnung an, spricht also auch von Differentialen der Differentiale, als ob Gröſsen von der Quantität Null unter sich Differenzen haben könnten.

Faſste man den zweiten Teil der Infinitesimalrechnung, die Integralrechnung, nur als die Umkehr der Differentialrechnung, als die Rückkehr vom Differentialquotienten zur ursprünglichen Funktion

---

*) Die Null mag eine „sehr unbequeme Figur" sein (cfr. Du B.-R. pag. 79); in das gesamte Gröſsengebiet, wenn es sich um das Wachsen und Abnehmen handelt, gehört sie aber hinein und mit dem: „nichts durch nichts dividiert bleibt (!) nichts" kommt man nicht weiter. Man kann in der Darstellung das $\frac{0}{0}$ allenfalls vermeiden, aber von dem **Gedanken** des $\frac{0}{0}$ wird man sich nicht losmachen können. —

auf, so könnte man sich mit einer Erörterung der Principien der Differentialrechnung allenfalls begnügen. Aber die Integralrechnung hat ihre selbständige Bedeutung durch das bestimmte Integral. Dies erscheint als eine Summe von unendlich vielen Summanden, deren jeder für sich verschwindet. Die Integralrechnung betrachtet das Gewordensein, während die Differentialrechnung das Werden bis in seine Anfänge verfolgt. Ähnliche Bedenken finden aber auch hier statt. — Es wird mir versagt sein an diesem Orte dies zweite Gebiet der Infinitesimalanalysis in seinen Grundlagen zu betrachten. —

Oben (pag. 4) wurde die gebräuchliche Definition des Stetigen mitgeteilt. Ob man von da ab noch weiter zu fragen hat, oder sich bei dieser Definition beruhigen kann, darüber sind die Lehrbücher verschiedener Meinung [1]).

Wir wenden uns nun zu den Darstellungen der Quellen.

II. Die Lehren der Erfinder, die Einwürfe Berkeley's.

Der Gedanke der unendlich kleinen Inkremente entstand nicht plötzlich; er war im Altertume genugsam vorbereitet durch die Berechnung des Kreises, sowie anderer krummlinig begrenzter Flächen, und er wurde weitergeführt seit dem Wiedererwachen der Wissenschaften durch Cavalleri [2]), Kepler, Fermat, Barrow. Das Historische findet sich in einem kurzen Resumé bei Leibniz selbst [3]) und ist aufgehellt durch die Herausgabe der Leibniz'schen Schriften und Manuscripte [4]). Es wird dabei bleiben, dafs die Ehre der Erfindung unbeschadet den Verdiensten der Vorgänger Leibniz, dem Deutschen, gebührt. —

1. Leibniz.

Sehen wir zu, was Leibniz unter dx versteht [5]).

„dx significat elementum, id est incrementum vel decrementum (momentaneum) ipsius quantitatis x (continue) crescentis. Vocatur et differentia, nempe inter duas proximas x elementariter (seu inassignabiliter) differentes, dum una fit ex altera (momentanee) crescente vel decrescente“. —

In der grundlegenden Abhandlung [6]): „Nova methodus pro maximis et minimis“ heifst es, nachdem die hauptsächlichsten Regeln erwähnt sind:

„Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato et hoc unum hactenus non satis expensum consideranti, ipsas dx dy dv dw dz ut ipsarum x y v w z (cuiusque in sua serie) differentiis sive incrementis vel decrementis momentaneis proportionales haberi posse“, eine Stelle, die von allen, die sich mit der Geschichte der Leibniz'schen Entdeckung beschäftigt haben, immer wieder citiert wird.

---

[1]) Cournot, Theorie der Funktionen, übersetzt von Schnuse. 1845. pag. 50. — Lipschitz, Lehrbuch der Analysis. II. 1880. pag. 4.

[2]) Cavalleri, Geometria indivisibilibus nova quadam ratione promota. Bononiae. 1653. Über seine Methode ist das interessante Scholion in lib. II. Theor. 1 nachzulesen. Seinen Darlegungen liegt der Gedanke zu Grunde, dafs die fortrückende Gerade die Fläche, die sich verschiebende Fläche den Körper erzeuge. Jedoch möchte es fast scheinen, als wäre ihm die Summe der Querschnitte, obwohl man ihre Anzahl nicht kennt, das erzeugte Quantum und als dächte er sich die schneidenden Ebenen als Teile des Ganzen.

[3]) Leibniz (ed. Pertz) III. IV. pag. 11.

[4]) C. J. Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland. München. 1877.

[5]) Leibniz, III, VII. pag. 222.

[6]) Leibniz, III, V. pag. 223, sowie Acta eruditorum. 1684.

Wie: nach der einen Stelle sind dx dy die momentanen Inkremente selbst, nach der andern Stelle Gröfsen, die diesen momentanen Inkrementen nur proportioniert sind [1]). — Es kommt hier auf den Ausdruck inassignabile an, über den in dem Entwurfe der Mathesis universalis [2]) Auskunft gegeben wird.

„Dantur et quantitates inassignabiles, eaeque vel infinitae vel infinite parvae seu infinitesimae eaequae rursum varii gradus. Quae etsi per se non prosint, prosunt tamen non raro ad quantitates assignabiles per inassignabilium ambages inveniendas“.

Also sind, wie auch noch aus einer später anzuführenden Stelle der letzteren Abhandlung näher hervorgehen wird, die dx dy unangebbare, in ihrer Wirklichkeit weder durch Zeichnung, noch durch endliche Zahlenausdrücke darstellbare Bezeichnungen. Wenn sie in einer symbolischen Zeichnung nichtsdestoweniger auftreten, wie denn auch in der Figur der Abhandlung vom Jahre 1684 das dx als ein für sich gezeichnetes Linienstück sich findet, so ist streng festzuhalten, dafs diese gezeichneten dx dy nicht diese Infinitesimalen selbst darstellen, sondern Linien sind, die den wirklichen dx dy, den momentanen Inkrementen, für proportional gehalten werden müssen. Ist aber dies der Fall, so mufs eine Vergleichung zwischen den wirklichen Inkrementen stattfinden können; es mufs möglich sein, dafs je zwei dieser inassignabilia einen Quotienten liefern, der eine quantitas assignabilis oder, wie sich Leibniz sonst ausdrückt, eine quantitas ordinaria ist.

Es sind besonders die Angriffe Nieuwentiit's, die 1695 Leibniz nötigten, sich über diesen Punkt näher zu erklären. Durch Anhäufung metaphysischer Schwierigkeiten (nimia scrupulositate) den Fortschritt seiner Entdeckungen aufgehalten zu sehen, war dem Entdecker, der, wo andere Bedenken hatten, keine sah, unangenehm. In seiner Korrespondenz mit den Brüdern Bernouilli und mit Varignon finden sich zahlreiche Stellen, die von diesem Unmute zeugen [3]). Doch äufsert er sich über die Bedenken in der Responsio ad nonnullas difficultates etc., wie folgt [4]): Ein solches Inkrement sei nicht ein absolutes Nihil, aber ist unvergleichbar klein und kann nicht mit den Quantitäten verglichen werden, deren Differenz es ist [5]), wohl aber können solche Inkremente unter sich verglichen werden; unter sich sind sie homogen, da als homogene Gröfsen solche gelten, von denen die eine mit einer endlichen Zahl multipliziert eine andere übertreffen kann. Also repräsentiert nur (Fig. 1) in der Figur die kleine Linie das Element dx der Abscisse uud die kleine Linie repräsentiert das Element der Ordinate, damit man sagen könne: XY : XV = dy : dx. So können Verhältnisse der Inkremente durch quantitates ordinariae ausgedrückt werden.

---

[1]) Nicht nur „scheinen“ wie Du B.-R. (pag. 83) meint. Das Wort „proportionales“ steht ausdrücklich da.

[2]) Leibniz, III. VII. pag. 68 ff.

[3]) Leibniz, III. III. pag. 195. „(Nieuwentiit) abutitur interdum nostris ratiocinationibus, ut tales calculos non esse tutos probet; velut, cum ex eo, quod ipsae dx constantes assumuntur, secundum nos sequi putat etiam ipsas dy fore constantes“.

III. III. pag. 369. „Noster (Nieuwentiit) respondet negando 2 m esse duplum ipsins m. Et ut absurditatem cumulet absurditate, rationem reddit suae negationis, nempe 2 m non fieri multiplicando numerum m per numerum 2, sed multiplicando numerum 2 per numerum m. Spectatum admissi risum teneatis amici. Qui talia concoquere potest etc.“

III. IV, pag. 109. „La consideration des differences elementaires estant la veritable clef des secrets de la Geometrie interieure . . . . de sorte que c'est inventa fruge glandibus vesci . . . que de chercher des detours pour l'eviter“.

[4]) Leibniz, III. v. pag. 322 ff.

[5]) Du B.-R's Idealist setzt sich hiermit bedenklich in Widerspruch (p. 75), wenn er sagt: „Das Unendlichkleine hat mit dem Endlichen dessen sämtliche Eigenschaften gemein“.

In dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Varignon vom Jahre 1702 [1]) findet sich eine weitere ausführliche Auslassung über die Natur der Verhältnisse der Infinitesimalen, der ich eine höhere Bedeutung zuschreiben möchte. Um weiteren Angriffen zu begegnen, macht Leibniz darauf aufmerksam, dafs in den einfachsten Sätzen über die Proportionalität der Beweis liegt, dafs infinitesimale Gröfsen ein bestimmtes Verhältnis haben. Diese „Justification du Calcul des infinitesimales" betrachtet eine einfache Figur (Figur 2): AE und XY seien lotrecht auf AX, YE verschiebe sich parallel mit sich selbst, so dafs sich E dem A nähere. Die gemessenen Längen der Linien AC, AE, AX, XY seien c, e, x, y. Alsdann ist stets $\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e}$.

Es werden c und e sich stets vermindern, aber der Quotient (la raison) dieser Gröfsen bleibt, und wenn der Winkel der sich schneidenden Linien ein anderer als ein halber rechter, ist dieser Quotient nicht $= 1$.

„Posons maintenant le cas que la droite EY vienne tomber en A même, il est manifeste que les points C et E iront aussi tomber en A, que les droites AC, AE ou c et e evanouiront et que de l'analogie ou equation $\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e}$ sera fait $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$. Donc dans le cas present il y aura $x - c = x$. Supposant que ce cas est compris sous la regle generale. Et neanmoins c et e ne seront point des riens absolument, puis qu'elles gardent ensemble la raison $\frac{CX}{XY}$. — Car si c et e estoient des riens absolument dans ce calcul reduit au cas de la coincidence des points C E A, comme un rien vaut l'autre, c et e seroient egales et de l'equation ou analogie $x : y = c : e$ seroit fait $x : y = 0 : 0 = 1$, c'est à dire il y auroit $x = y$, ce qui est une absurdité, puisque nous avons supposé que l'angle est autre que demidroit".

Ebenso also, wie in diesem Beispiele die verschwindenden Linien ein bestimmtes Verhältnis bewahren, so auch in der Rechnung die momentanen Zuwächse der Koordinaten.

Man darf diesem Beispiele gegenüber nicht den Einwurf machen, dafs sich der Vorgang mit dem Objekte der Untersuchnng nicht ganz decke, weil hier ja der Exponent, da es sich um das Fortschieben von Parallelen zwischen Parallelen handele, fortwährend derselbe bleibe, während sich sonst ja $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ beim Verkleinern des Zählers und Nenners fortwährend ändere. — Denn es kommt zunächst darauf an, zu zeigen, dafs auch Gröfsen im Momente ihres Verschwindens, wenn sie (comparativement zu x und y) zu Nullen werden, einen endlichen Quotienten liefern können. Die Gröfsen sind hier „dans l'acte d'evanouir et de même du mouvement, qu'il n'est pas encor rien absolument, mais qu'il est sur le point de l'estre".

Ganz ähnlich spricht auch Leibniz, wenn er in der bereits oben angeführten Mathesis universalis den Fall betrachtet, bei welchem in der Kurve die Sekante zur Tangente wird [2]). „Et si recta TC (Fig. 3) axi AB occurrat in T, patet triangula TBC et CD(C) esse similia. Sed in casu contactus, cum recta TC curvam AC(C) non secat sed tangit, seu cum puncta C et (C) coincidunt, vel, quod eodem redit, infinite parvo (sive infinitesimo) distant intervallo, patet triangulum CD(C) fieri inassignabile, constans ex lateribus infinite parvis et CD esse elementum abscissae et D(C) esse elementum ordinatae et C(C), quemadmodum et suo loco patebit, esse elementum curvae;

[1]) Leibniz, III. IV. pag. 104.
[2]) Leibniz, III, VII. pag. 75.

adeoque Triangulum hoc inassignabile CD(C) simile esse Triangulo assignabili seu ordinario TBC, imo ope huius Trianguli inassignabilis seu interventu rationis inter quantitates inassignabiles CD et D(C) (quam noster calculus differentialis exhibet per quantitates ordinarias seu assignabiles) inveniri rationem inter quantitates assignabiles TB et BC, adeoque modum ducendi tangentem TC".

Wenn wir nun aber weiter fragen, *warum* je zwei inassignabilia, sei es nun, dafs sie ein Verhältnis fortwährend behalten, oder ein anderes bekommen, überhaupt ein Verhältnis haben können, so erhalten wir allerdings eine Antwort, aber nur die, worauf sich auch jetzt die Darstellungen gründen. Das *Gesetz der Kontinuität* verlange dies. Es würde verletzt werden, wenn nicht ein Verhältnis der Inkremente stattfände. Dies ideale Gesetz, das auch das Polygon von unendlich vielen Seiten mit dem Kreise ausgleicht, fordere — und hier sind die Worte kühn genug —[1]), dafs die Ruhe wie eine unendlich kleine Bewegung, d. h. wie *äquivalent einer Species ihres kontradiktorischen Gegenteils* betrachtet werden müsse.

Leibniz ringt in diesen Worten mit dem Ausdrucke. Dafs es sich um die Durchführung eines Gedankenprozesses handele, ist ihm ja offenbar. Deshalb benutzt er, um sich deutlich zu machen, auch die alten logischen Kategorien des kategorematisch-Unendlichen und synkategorematisch-Unendlichen, die im wesentlichen dem Gegensatze des Aktuellen und Potentiellen entsprechen. Sein dy, sein $\int dy$ sind keine Quantitätszeichen, sondern sie sind notiones synkategorematicae und bedeuten die Forderung und Durchführung einer Rechnungsoperation, sowie das Wurzelzeichen die Zerfällung in Faktoren, auch wenn das Resultat nur irrationale Werte giebt, fordert, sowie die Gleichung $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots$ ihm ein infini synkategorematique ist[2]).

Weiter als bis zu dieser Berufung auf das Gesetz des Kontinuums, dafs es ins Unendliche teilbar sei[3]), dürften wir bei Leibniz nicht kommen. — Die mitgeteilten Aussprüche halte ich für diejenigen, welche das, was er unter dem Unendlichkleinen versteht, genugsam *umgrenzen*. Bevor wir das Resultat herausstellen, möge noch einen Augenblick auf den Vorwurf eingegangen werden, der Leibniz mehrfach gemacht wird[4]), als wechsele er ganz unsicher mit dem Ausdrucke infinitum und incomparabile. Es ist ja wahr, dafs er, um das Unendlichkleine zu verdeutlichen, sein Verhältnis zum Endlichen vergleicht z. B. mit dem des Erdradius zur Entfernung der Fixsterne. Daraus könne man folgern, wird gesagt, dafs er einen Irrtum zugebe, wenn auch einen kleinen. Doch vergleiche man den zweiten Brief an Varignon[5]). Leibniz wollte den Aufbau seiner Wissenschaft nicht aufgehalten wissen durch Kontroversen. Um der *Menge* einen vorläufig genügenden Standpunkt zu geben, erklärt er das Unendliche durch solche populäre Beispiele, auf die er schwerlich selbst einen Wert legt. Einen solchen kolossalen Widerspruch mit sich selbst kann man Leibniz nicht zutrauen. Selbst „Idealist" will er den „Empiriker" vorläufig beruhigen. Hierin folgt ihm später Wolff, wenn er das Gleichnis des vom Berge herabgewehten Sandkorns gebraucht. — Wenn der Ausdruck incomparabile sonst noch angewandt wird, so bezieht er sich eben darauf, dafs die Infinitesimalen

---

[1]) cfr. den zweiten Brief an Varignon in III. IV. pag. 93.

[2]) Leibniz III. VII. pag. 54. — III. III. pag. 90. — Aufmerksam auf diese Bezeichnung macht bereits J. K. F. Hauff in seiner Schrift: Betrachtungen über etc. von Carnot (übersetzt und mit Zusätzen begleitet). pag. 105. Chauvin in Lexicon philosoph. pag. 317. definiert: Infinitum synkategorematicum est infinitum solum in potentia. cfr. auch Prantl, Gesch. d. Logik. II. pag 378 u. III. pag. 66.

[3]) Baumann, die Lehren etc. II. 45. ff.

[4]) L. Euler, Institutiones calculi differentialis. pag XII. — E. C. Dühring, de tempore, spatio etc. Dissert. inaug. Berlin. 1861.

[5]) Leibniz, III. IV. pag. 91.

unter sich wohl einen bestimmten endlichen Quotienten liefern können, aber nimmermehr ein momentanes Inkrement mit einer quantitas ordinaria.

Fassen wir nun diese Auslassungen zusammen. — Die Einführung der Infinitesimalen gehört bei Leibniz im eminenten Sinne dem Gebiete des Idealen an, wie der fortwährende Gebrauch des Ausdrucks inassignabile zeigt, worauf evanescens in nihilum, fictiones [1]) hinweisen. Im Vergleich mit den assignabilia sind sie nichts, aber nur comparativement à x et y; unter sich behalten sie ihr Verhältnis; deshalb sind sie nicht für sich Nullen, sondern nihila respectiva. Das charakteristische Dreieck, das dx dy ds zu Seiten hat, ist ein Dreieck, in quo retineatur species trianguli abstracta a magnitudine, behaltend in seinen Gröfsenverhältnissen den Charakter des verschwindenden. Wären die Infinitesimalen absolute Nullen, so wäre von einem Verhältnisse, noch mehr aber von zweiten Differentialen keine Rede. Sie sind unumgänglich notwendig, wenn es sich um ein Verständnis des Werdens handelt, und haben, weil das Gesetz der Kontinuität herrscht, ihr Fundament in der Natur der Dinge, deren Entstehen man ohne diese ideale Auffassung nicht begreifen kann. Die Schlufsweisen sind streng; denn ein Fehler, von dem sich beweisen läfst, dafs er kleiner sei quovis dato, ist kein Irrtum, fügt er oft hinzu, einen indirekten Beweis brauchend.

Dieser letztere Punkt wird noch ausdrücklich betont in einer wichtigen Stelle der Responsio ad nonnullas difficultates [2]): „Nempe, ut iam alias notare memini, quantitas ordinaria, quantitas infinitesima prima et quantitas differentio-differentialis sese habent ut motus et celeritas et sollicitatio, quae est elementum celeritatis. Motu describitur linea, velocitate elementum lineae, sollicitatione elementum elementi".

Ob diese Stelle nur ein Beispiel sein soll, oder ob sie das zu Grunde liegende Allgemeine betonen will, möchte ich nicht entscheiden. Wichtig ist sie aber insofern, als sie zeigt, dafs es nicht so isoliert steht, wenn Newton den phoronomischen Gesichtspunkt hervorhebt. Newton hat nicht allein den Gedanken der Bewegung eingeführt.

Eine Umgrenzung der Begriffe sind alle diese Erläuterungen von Leibniz mehr als eine erschöpfende Darstellung. Sie sind hervorgegangen aus der Polemik, sind zerstreut in Briefen und Abhandlungen; ein zusammenhängendes Lehrsystem seiner Infinitesimalrechnung findet sich nicht; wo er es geben will, kommt er über Ansätze dazu nicht hinaus. —

2. Newton und die Fluxionsrechnung.

Es ist bekannt, dafs die beiden Hauptquellen für die Kenntnis der Newtonschen Betrachtungsweise die „Methodus fluxionum et serierum infinitarum" [3]) und die „Philosophiae naturalis principia mathematica" sind, und dafs die Darstellungen beider Werke von einander abweichen, ohne sich zu widersprechen. — In dem ersteren Werke operiert Newton von vornherein mit dem Gedanken der Bewegung und der Geschwindigkeit. Die Probleme lassen sich nach ihm unter folgende zwei subsummieren [4]):

1) Die Länge des Raumes sei kontinuierlich gegeben, die Geschwindigkeit der Bewegung für irgend eine gegebene Zeit sei zu finden. (Also die Differentialrechnung.)

---

[1]) Leibniz, III. IV. pag. 218.
[2]) Leibniz, III. V. pag. 325.
[3]) Mir zugänglich in der franz. Übersetzung „la methode des fluxions". Paris 1740.
[4]) a. a. O. pag. 20. (LVI, LVII).

2) Die Geschwindigkeit der Bewegung sei kontinuierlich gegeben, die Länge des Raumes für irgend eine gegebene Zeit zu finden. (Die Integralrechnung.)

Die Ausführungen sind mehr dogmatisch als genetisch. Dafs zuerst ein Problem aufgestellt wird, dann die Regeln für die Auflösung mitgeteilt werden, dann eine Demonstration der Lösung folgt, verhüllt in etwas die treibenden Gedanken.

Die variabelen Gröfsen x y heifsen bei ihm Fluenten, die Geschwindigkeiten Fluxionen ($\dot{x}$ $\dot{y}$), die Inkremente Momente. Die gleichförmige Geschwindigkeit einer Fluente (welche nicht weiter definiert, sondern deren Begriff als feststehend aufgenommen wird) dient als Mafs für die Geschwindigkeiten der anderen, als wenn sie die Zeit wäre. Diese kann deshalb den Namen „Zeit" erhalten, wenn man darunter die Zeit nicht als im eigentlichen Sinne als solche versteht, sondern eine Quantität, durch deren lokale, gleichförmige Fluxion die Zeit gemessen werden kann [1]). —

Der Kern der Sache wird nun weiter gleichsam als Prinzip vorausgesetzt. Denn es heifst in der Demonstration des ersten Problems, der einzigen Stelle der Methodus, in welcher die inneren Zusammenhänge aufgedeckt werden: „Die Momente der Fluenten, d. h. die unbestimmt (indefinement) kleinen Teilchen, um welche dieselben in den unbestimmt kleinen Zeitteilchen wachsen, verhalten sich wie die Geschwindigkeiten". Also sind die Momente die Produkte $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, worin die Fluxionen als Multiplikanden, die Quantität o als Multiplikator auftreten, wenn o eine unbestimmt kleine Quantität ist.

Von da ab ist in dieser Demonstration die Rechnung die gewöhnliche. Die Gleichung der Fluenten sei $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0.$

Sie gilt für $x = x + \dot{x}o$ und für $y = y + \dot{y}o$. Diese neuen Werte der Variabelen werden eingesetzt, von der neuen Gleichung wird die alte abgezogen, der Rest wird, da überall der Faktor o auftritt, durch o dividiert; o mufs aber, damit es als Multiplikator die Produkte $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ zu wirklichen Momenten machen kann, unendlich (infiniment) klein gesetzt werden [2]); also verschwinden die mit ihm multiplizierten Terme im Vergleich zu den anderen und man erhält:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Was stellt sich als Gemeinsames, was als Unterschied heraus bei einem Vergleiche der Fluxionsrechnung mit dem Leibnizschen Algorithmus? —

Dafs die Variabelen, die Fluenten eine Geschwindigkeit haben, ist bei Newton und bei seinen Nachfolgern ein fertiger Gedanke [3]). Ist die Bewegung gleichförmig, so wird die Geschwindigkeit gemessen durch den Raum; ist sie es nicht, so wird sie gemessen durch den Raum, den sie von einer bestimmten Zeitgrenze an beschrieben haben würde, wenn die Bewegung von da ab gleichförmig geblieben wäre. Man wird vergebens nach einer anderen Definition der Geschwindigkeit suchen, als dafs sie die mit sich identische, gleichförmige Bewegung sei.

Somit ist klar, dafs die kleine Quantität o nichts anderes sein kann, als die unendlich kleine Quantität der Zeit, in dem Sinne, den Newton vorausbestimmt hat; diese als Multiplikator aufgefafst macht erst die Produkte $\dot{x}o$ und $\dot{y}o$ zu Momenten nach dem oben angeführten Grundsatze.

---

[1]) a. a. O. pag. 21. (LIX.)

[2]) Ich verstehe Du Bois-Reymond nicht, wenn er pag. 84 sagt, Newton habe das Unendlichkleine nicht einmal als litteralen Ausdruck in seine Formeln aufgenommen. Ist denn dieses o nicht ein Unendlichkleines? —

[3]) Maclaurin, Traité des fluxions, traduit par Pezenas. Paris 1749. I. pag. 3.

Nehmen wir die gebräuchliche Bezeichnung, so ist, was bei Leibniz dx und dy ist, bei Newton $\frac{dx}{dt}$ dt und $\frac{dy}{dt}$ dt. Von da ab ist die Rechnung übereinstimmend; denn das bewirkt keinen Unterschied, dafs Newton bereits eine unentwickelte Funktion differenziert. Das dt, da es konstant ist, mufs sich herausheben und das Resultat $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ist dasselbe wie das Leibnizsche $\frac{dy}{dx}$, wenn von nun ab die Geschwindigkeit $\dot{x}$ als die gleichförmige eintritt, die also auch dann, wenn man will, als die Zeit gelten kann [1]).

So ist bei Newton der Begriff der Geschwindigkeit bereits als Grundlage vorhanden, ehe er in die Rechnung eintritt. Das Unendlichkleine wird bewirkt durch die Zeit o, die $\dot{y}$ $\dot{x}$ treten als endliche Gröfsen auf. Man kann sogar, da in der Rechnung eine Fluxion immer mit dem betreffenden o multipliziert erscheint, wie auch Newton später thut, das o ganz weglassen und dann mit $\dot{x}$ und $\dot{y}$ rechnen, wie mit dx und dy, und es könnte scheinen, als wäre die Rechnung mit dem Unendlichkleinen ganz zu umgehen. Aber dies ist nur ein Schein; denn um die Methode zu fassen und zu verstehen, war die Einführung dieses o notwendig. Bei Leibniz ist dagegen der Gedanke der Geschwindigkeit, dafs nämlich eine Bewegung als durch die andere gemessen erscheint, das Resultat der Rechnung. Wenn man das Bild der Kurve vor sich hat, so ist bei ihm $\frac{dy}{dx}$ der numerische Multiplikator des dx, während bei Newton o als Multiplikator des $\dot{y}$ auftritt, wie bereits bemerkt.

Wenn man das obige Prinzip, dafs die Momente der Fluenten sich wie die Geschwindigkeiten verhalten [2]), zugiebt, so ist keine innere Schwierigkeit mehr. Aber das ist es eben. Was macht eine Geschwindigkeit zum Moment? Der unendlich kleine Multiplikator. Dies ist nicht so leicht zu verstehen.

Bei alledem ist doch in dieser Stelle der Methodus fluxionum, die so eben betrachtet worden, ein innerer geschlossener Zusammenhang, da die Anschauung die Darlegung fortwährend verfolgen kann, bis zu der crux des unendlich kleinen o hin.

Die Philosophiae naturalis principia mathematica gehen, was das Metaphysische betrifft, insofern etwas tiefer in die Sache ein, als die Existenz der Fluxionen, die hier durch die „ersten und letzten Verhältnisse" ersetzt werden (rationes primae et ultimae), bewiesen, nicht vorausgesetzt wird. Dabei tritt das erste Mal für dieselben das Wort Limes auf. In dem die ganze Sache erörternden Scholion [3]) ist die Stelle, in welcher Newton auf etwaige Einwürfe antwortet, folgende:

„Obiectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio, quippe quae, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed et eodem argumento aeque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam; hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse."

Es ist ein indirekter Beweis, den somit Newton anwendet, um die Existenz der Fluxionen darzuthun. Leugnet man das Dasein der ratio quantitatum evanescentium, so leugnet man die Existenz der Endgeschwindigkeit, quacum corpus cessat.

---

[1]) cfr. Cournot-Schnuse, Theorie der Funktionen, pag. 40.

[2]) cfr. auch Newton, Tractatus de quadratura curvarum.

[3]) cfr. Principia etc. Genf. 1739. I. pag. 62 ff., insbesondere pag. 78.

Das Wesentliche im indirekten Beweise ist aber, dafs jeder Gegengrund, der gegen ein ursprüngliches Prinzip verstöfst, in sich zusammenfällt. Ein Prinzip ist das an sich Klare und Deutliche, das also nicht durch Ableitung aus einem Früheren erkannt wird, sondern nur angeschaut werden mufs, eine ursprüngliche That des Geistes. Ist die Einsicht in die Existenz der Endgeschwindigkeit ein solches Prinzip? — Ich werde auf diesen Punkt noch einmal am Ende der Abhandlung zurückkommen müssen. — Die Stelle, in der das Wort Limes gebraucht wird, ist folgende:

„Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant et quem propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi".

Ein halbes Jahrhundert später gewann dieser Ausdruck erhöhte Bedeutung.[1]) —

3. Berkeley.

Im Wesentlichen war die Grundlage der Methode gelegt. Die Mathematiker bauen in dieser Glanzperiode ihrer Wissenschaft weiter, aber Philosophen bezweifeln die Richtigkeit der Principien. Der Prototypus derer, die gegen die Möglichkeit, den Gedanken des Unendlichen auszudenken, auftreten, ist Berkeley, der in seinem „Analytiker" (1734) seinen Bedenken Ausdruck gab und die Infinitesimalrechnung „erfüllt von Mysterien" nannte, die stärkere Anforderungen an das Verständnis stellten als die Geheimnisse des Glaubens. Die ganze Methode gründe sich auf falsche Räsonnements. Im Uebrigen auf den ausführlichen Bericht Baumanns verweisend[2]) hebe ich nur die Hauptpunkte hervor, um durch die Verdichtung derselben die angeführten Gegengründe herauszustellen. —

1. Eine unendlichkleine Quantität, ein Ding, das zwischen der Null und einer endlichen Gröfse sich befinde, sei nicht vorzustellen. Die Infinitesimalen in statu nascenti, ehe sie endliche Teilchen werden, anzuschauen, gehe über das menschliche Verständnis. Die Schwierigkeit werde gröfser bei den Fluxionen höherer Ordnungen, den Geschwindigkeiten der Geschwindigkeiten, den Differentialen der Differentiale. Diese Geister der verschwundenen Quantitäten, diese Scheinentitäten seien nicht als Objekte klarer Wissenschaft zuzulassen.

2. Das Identitätsgesetz sei verletzt. — Man baue zunächst die Rechnung darauf, dafs das Inkrement, das Moment ein Etwas sei; dann mache man die entgegengesetzte Annahme, dafs es ein Nichts sei. In derselben Rechnung könne man doch nur bei einer und derselben Bedeutung bleiben und dürfe nicht die aufgerichteten Gerüste wieder einreifsen. Mit der Aufhebung der ersten Annahme zerstöre man alles, was man gewonnen habe.

3. Der Begriff der Geschwindigkeit sei ein abgeleiteter, sei nicht denkbar ohne Raum und Zeit. Lasse man also den Raum verschwinden, indem das Inkrement zur Null werde, oder doch mit Newton die Zeit, so höre die Geschwindigkeit auch auf, um so mehr auch jedes Verhältnis zwischen zwei Geschwindigkeiten, das nun einmal als $\frac{S}{T} \cdot \frac{T^1}{S^1}$ gedacht werden müsse.

4. Dafs nun gleichwohl die abgeleiteten Ergebnisse richtig seien, wie aus ihrer Vergleichung mit den Resultaten früherer Methoden hervorgehe, sei noch kein Beweis für die Richtigkeit der

[1]) Ein Einwurf Dührings (cfr. de spatio et tempore, pag. 102.) scheint mir nicht gerechtfertigt. Er hält die Idee der ultima ratio nicht für adäquat „propter latera exstincta" und will sie ersetzt haben durch limes quantitatis $\frac{dy}{dx}$. Aber eine jede ratio ist doch auch eine quantitas, wie $\frac{12}{3} = 4$. —

[2]) Die Lehren etc. II pag. 486 ff.

Prinzipien, die an sich durchsichtig und widerspruchsfrei sein müfsten, wenn die Infinitesimalrechnung den Anspruch auf Wissenschaft erheben wollte. Die Richtigkeit der Resultate könne von einer Ausgleichung und einer gegenseitigen Aufhebung der in den Prämissen gemachten Fehler herkommen, der erste Irrtum de defectu wieder durch einen zweiten de excessu getilgt werden. —

Diese Einwürfe Berkeleys bleiben bei den Gegnern immer dieselben bis auf den heutigen Tag. [1]) Sind sie doch auch triftig genug. Würden sich die drei ersten, besonders der gewichtige dritte, aber als hinfällig erweisen, so bliebe allerdings für den vierten kein Raum übrig.

III. Spätere Darstellungen.

1. Maclaurin.

Das umfassende Werk von Maclaurin entstand auf Veranlassung von Berkeleys Analysten [2]) und war eine Antwort auf die dort gemachten Angriffe. Es unterzieht dieselben einer eingehenden Erwiderung und sollte von keinem ungelesen bleiben, der sich mit hierher gehörigen metaphysischen Untersuchungen beschäftigt. In ihm müssen wir zwei Arten der Darlegung unterscheiden. Erstens will Maclaurin die Theorie der Fluxionen von der Rechnung mit dem Unendlichkleinen befreien und begründet sie zu diesem Zwecke in einer Reihe der speziellsten Untersuchungen durch die einzelnen Probleme hindurch nach Weise der Alten vermittelst indirekter Beweise in einer in der That wegen der fortwährenden Wiederholungen oft ermüdenden und weitläufigen Art. Diese gröfsere Partie seines Werkes gehört nicht in den Bereich unseres Themas. —

Nebenher aber geht eine Rechtfertigung derjenigen Gestalt der Infinitesimalrechnung, die sie bis dahin von Newton und Leibniz erhalten hatte. Er hält also diese Methoden für durchaus zulässig, wenn auch nicht für unumgänglich notwendig und unerläfslich. Dieser Teil interessiert uns besonders wegen des Eingehens auf die Berkeleyschen Vorwürfe [3]). —

Maclaurin zeigt, wie durch scharfe Fassung von nur wenigen an sich klaren Axiomen der Begriff der ultima ratio als eines limes beim Verschwinden der Quantitäten entstehe. Ich reproduziere in Kürze diese Darlegung, da sie ein klares Bild deutlicher Beweisführung giebt, die in der That wegen ihrer durchgreifenden Kraft mustergiltig ist. —

Ein Hauptaxiom ist folgendes: Wenn (Fig. 4) ein Punkt M mit kontinuierlich beschleunigter Geschwindigkeit den Raum LS beschreibt (der linear aufgefafst werden mag), so ist LS gröfser als der Raum, den M in derselben Zeit beschreiben würde, wenn es die Geschwindigkeit, die es in L hatte, beibehielte, und LS ist kleiner als der Raum, den M mit der Geschwindigkeit beschreiben würde, die es erst in S erlangt.

Ein Verhältnis der Geschwindigkeit von M in L zu einer konstanten Geschwindigkeit eines Punktes P in D ist jedenfalls vorhanden. Es sei gleich dem Verhältnis der Linien $\frac{lc}{dg}$. Das Verhältnis der Geschwindigkeit von M in S zu dieser konstanten Geschwindigkeit sei $\frac{lx}{dg}$. So ist $\frac{lc}{dg} < \frac{lx}{dg}$. LS sei ein bestimmter endlicher Raum und während M diesen zurücklege, lege P den endlichen

[1]) cfr. die Einwürfe des Empirikers bei Du B.-R. pag. 87—113.
[2]) Maclaurin, Traité. II. pag. 1 ff.
[3]) cfr. I. pag. 8 u. 9, insbesondere I. pag. 45. II. pag. 3.

DG zurück. Man kann stets das Verhältnis $\frac{LS}{DG}$ auf den Nenner dg gebracht denken. Der betreffende Zähler sei dann ls. Dann ist infolge unseres Axioms

$$\frac{lc}{dg} < \frac{ls}{dg} < \frac{lx}{dg}$$

und es liegt demnach s zwischen c und x. Die Linie LS ist aber an keine andere Bedingung gebunden, als daſs sie mit kontinuierlich beschleunigter Geschwindigkeit zurückgelegt wird, daſs also, je näher ich mir S an L denke, desto mehr sich lx dem lc nähert. Da ich also cx so klein denken kann als ich will, so ist auch cs kleiner als eine beliebig kleine Gröſse, also $\frac{lc}{dg} = \lim. \frac{LS}{DG}$ für den Fall, daſs LS und DG verschwinden. Mithin ist dem Berkeleyschen Vorwurf (ad 3) begegnet, daſs die Verhältnisse der Geschwindigkeiten aufhören, wenn die Inkremente verschwinden. Ähnlich ist der Beweis, wenn die Geschwindigkeit von M kontinuierlich abnimmt. — Was ist aber dieses cs, das in ls, also proportionaliter auch in LS enthalten ist, ohne doch dem der Geschwindigkeit entsprechenden Gliede anzugehören? Vergleichen wir damit die arithmetische Darstellung. — Denn, sagt Maclaurin ferner, diese graphische Darstellung ist im Wesentlichen dieselbe, als wenn ich etwa $y = x^2$ setze und $z = ax$, und dann $\frac{\dot{y}}{\dot{z}}$ suche. Wird x zu x + 0, so ist das Verhältnis der Inkremente $\left(\frac{LS}{DG}\right) = \frac{2\,xo + o^2}{ao} = \frac{2\,x + o}{a}$. Dieses o ist dasselbe, was oben in der Darlegung cs war. Dies kann nicht nur weggelassen werden, wie der Leibnizsche Algorithmus abkürzend sagt, als ein Unendlichkleines gegenüber dem Endlichen, sondern es muſs weggelassen werden, da sein Dasein ein Fehler sein würde. Denn es kommt nicht von der konstanten Geschwindigkeit in $\dot{y}$ her, deren Verhältnis zu der Geschwindigkeit $\dot{z}$ ich suche, sondern von der Zunahme derselben, die sie erlangt, während x um o wächst. Diese Zunahme suche ich hier gar nicht. Suche ich das Verhältnis solcher Zunahmen der Geschwindigkeiten, so ist dies eben eine weitere Aufgabe, die dann die Fluxionen der nächsthöheren Ordnungen ebenso sicher einführt, wie die Verhältnisse der Fluxionen durch die Verhältnisse der verschwindenden Räume eingeführt werden. Dann würden sich wieder in cs zwei Teile unterscheiden lassen u. s. f. —

Maclaurin antwortet nicht genau auf den oben mit 1 bezeichneten Einwurf Berkeleys, daſs man die Infinitesimalen nicht anschauen könne. Er hat eine Abneigung dagegen, da ihm ja der Begriff der ersten Fluxionen, der konstanten Bewegung, ein an sich feststehender ist und ein anschaubarer, wenn man nur dies „würde" festhält. Dieser Begriff ist ihm der logisch frühere, der vor dem des beschriebenen Raumes vorhergehende. Er ist nicht eine „Scheinentität", sondern eine Anschauung, die ihm erst das Entstehen des Inkrements ermöglicht; deshalb ist ihm der Einwurf (ad 2.), daſs es ein Widerspruch sei Inkremente anzunehmen, um sie dann wieder aufzuheben*), so wenig verständlich, daſs er geradezu sagt, es wäre eher ein Widerspruch, die Inkremente nicht aus der Bewegung hervorgehen zu lassen. — In der That, wenn man diese Beweise Maclaurins liest, die so einleuchtend die Bestimmung des limes $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zeigen, die im Wesentlichen ja dieselbe Gestalt haben, die man ihnen auch jetzt noch giebt, so begreift man die Einwürfe nicht ganz, die im Vergleich zu solchen tief hineingehenden Erörterungen eher an der Oberfläche zu bleiben scheinen. — Und doch geschah dies noch oft genug.

*) cfr. II. pag. 10.

2. Euler.

Aus dem Verschwinden kann das Ziel, die Null, künstlich abstrahiert werden, wie aus dem Werden das Nochnichtsein. Wird das Letztere betont, so scheint das Sein in ihm undenkbar. Man fühlt sich fast versucht zu sagen: das Werden ist nicht. Die Gewöhnung, mit endlichen, diskreten Gröfsen zu rechnen, veranlafste ein neues Auftauchen des Widerspruchs, als Euler seine Differentialrechnung schrieb und die eine Seite der Differentiale, dafs sie Nullen seien, hervorhob und, abweichend von Leibniz, sie absolute[1]) Nullen nannte. Es mag sein, dafs durch das Bestreben Eulers, die Anwendung der Differentialrechnung auf die Geometrie zunächst fern zu halten, der Widerspruch verstärkt wurde. Der Eulersche Kalkül galt als Nullenrechnung, und obschon Euler die andere Seite, dafs es sich um den Quotienten, um das geometrische Verhältnis der Differentiale handle, dafs von einem wenn auch zu Ende gebrachten Vorgange, doch immer von einem Prozesse des Werdens die Rede sei, durchaus nicht vernachlässigte[2]), so jagte doch der Ausdruck: „absolute Null" eine solche Furcht ein, dafs man vor der Berührung mit Eulerschen Darstellungen fast floh. — Es beschäftigt sich z. B. der Verfasser (Michelsen) der 1790 erschienenen Übersetzung von Eulers Institutionen in seiner Vorrede damit zu beweisen, dafs Euler gar sehr gebrechliche Balken gebraucht habe beim Aufbau seiner Lehre, dafs sein Buch voll von Fehlschlüssen sei.

Ähnlich, um noch einen aus der Gruppe der Gegner zu erwähnen, verwirft Wrede, Professor der Philosophie und „ordentlicher öffentlicher" Lehrer der mathematischen Wissenschaften in Königsberg, einige Jahrzehnte später das Unendlichkleine mitsamt den Fluxionen[3]). Seine Gründe lassen sich leicht den Berkeleyschen subsummieren. Der Gedanke der kontinuierlichen Veränderung liegt dem Verfasser durchaus fern; das Diskrete drängt sich bei ihm so in den Vordergrund, dafs er dann Widersprüche über Widersprüche finden mufs und über die Leistungen der bedeutendsten Mathematiker der vorhergehenden 150 Jahre den Stab zu brechen sich erlaubt. Die Stellen, in denen Leibniz sich über dx und dy als verschwindende Gröfsen ausgesprochen hat, scheinen für ihn nicht zu existieren. Er bekommt es fertig, aus einzelnen Stellen bei Leibniz, selbst aus der klassischen in der Abhandlung vom Jahre 1684 (Demonstratio omnium etc.) ein unbestimmt Endliches als den wahren Begriff des Differentials herauszulesen. — Die Arbeiten der Früheren sind, um einige

---

[1]) L. Euler, Institutiones etc. Vorrede IX. „Quae (differentialia) igitur sua natura ita sunt interpretanda, ut omnino nulla seu nihilo aequalia reputentur". —

Vorr. XII. „Ea, quae fuerint neglecta, omnino et absolute pro nihilo esse habenda, neque infinite parva, quae in calculo differentiali tractantur, a nihilo absoluto discrepare." —

I. III. § 83. „Sed quantitas infinite parva nil aliud est nisi quantitas evanescens, ideoque revera erit = 0". —

[2]) Vorrede VIII. „Incrementa evanescentia, dum ipsa quantitas x incrementum evanescens sumit, ad hoc ipsum certam et assignabilem rationem tenebunt". — „Calculus igitur differentialis non tam in his ipsis incrementis evanescentibus, quippe quae sint nulla, exquirendis, quam in eorum ratione et proportione mutua scrutanda versatur". —

Vorr. XI. „Eorum rationes utique ad quantitates finitas reducuntur". —

Vorr. XIV., „Calculi differentialis fundamenta is iecisse existimandus est, cui in mentem venit has rationes ultimas contemplari". —

I. III. § 84. „Ratio quidem arithmetica inter binas quasque cyphras est aequalitatis, non vero ratio geometrica".

I. III. § 85. In calculo autem infinite parvorum nil aliud agitur, nisi ut ratio geometrica inter varia infinite parva indagetur, quod negotium propterea, nisi diversis signis ad ea indicanda uteremur, in maximam confusionem illaberetur, neque ullo modo expediri posset.

[3]) E. F. Wrede, Gründliche Darstellung der Differential- und Integralrechnung. Königsberg. 1817.

seiner feinen Ausdrücke zu erwähnen, „voll von Ungereimtheiten" und „versteckten Spitzfindigkeiten"; dieser „verkrüppelte Differential-Calcül" beschäftige sich nur mit einem „algorithmischen Chamäleon". Es wird nicht angesagt sein, auf weitere Ausführungen Wredes einzugehen. —

Zeitlich haben wir vorgegriffen, um die Stimmen einiger Gegner zu hören, die auch mitreden wollen und die da noch tadeln, wo sie die Tiefe der vorangehenden mathematischen Spekulation nicht einmal anerkennen, geschweige denn verstehen.

Früher schon waren aber zwei Werke erschienen, die dem Gedanken des Newtonschen Limes und der Vorstellung des Kontinuierlichen weiter nachgehen und im Ganzen das, was auch jetzt in den Lehrbüchern als zu einleitenden Principien Gehöriges sich vorausgeschickt findet, als Fundament hinstellen. Es sind dies die Schriften L'Huiliers und Carnots. —

3. L'Huilier.

Die Berliner Akademie stellte für das Jahr 1786 eine Preisaufgabe über die Darstellung der Differentialrechnung und forderte eine „klare und präcise" Theorie des mathematischen Unendlichen. Der Schweizer L'Huilier erhielt den Preis.

Auch er ist ein Gegner der Leibniz-Eulerschen verschwindenden Quantitäten und bekämpft ihre Vorstellung besonders in dem elften Kapitel seines Werkes. Das Verwerfen höherer Potenzen der Differentiale ist ihm ein Annullieren der Differentiale selbst und also ein kontradiktorischer Widerspruch; der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen ist seinem Denken nicht vollziehbar. Man lese folgende Hauptstellen *):

„On omet les puissances de cette différentielle, c. à d. on annulle aussi la différentielle même ... ce qui est contradictoire".

„Quant à la loi de continuité n'y a-t-il pas un saut immense de l'existence au néant et du fini à l'infini"?

„Quel que soit le nombre des subdivisions que nous exécutions sur le résultat des opérations déjà faites, il nous en reste toujours à faire un nombre plus grand qu'aucun nombre assigné".

Der Kern seiner Darstellung ist, dafs er das Differentialverhältnis (le rapport différentiel) definiert als die Grenze, der sich das Verhältnis der simultanen Veränderungen der Variabelen desto mehr nähert, je kleiner diese Veränderungen werden. An eine Division der Differentialen bei dieser Grenze scheint er nicht denken zu wollen. Denn dafs man limes $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ noch mit der Quotientenform $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet, ist ihm mehr eine Sache der Übereinkunft (on est convenu) als innerlich begründet. Er weist nun nach, dafs für die gebräuchlichsten Funktionen diese Grenze wirklich existiere, vermeidet aber durchaus, mit den Differentialen als solchen zu rechnen; er operiert wohl weiter mit $\frac{dy}{dx}$ als einem Werte, in dem dx und dy untrennbar sind, differenziert dies von neuem u. s. w; aber lim. $\frac{\Delta\frac{x}{y}}{\Delta x} = \frac{d\frac{x}{y}}{dx}$ hat ihm nur einen Sinn in der Form $\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}$, nicht in der Form $d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; $\frac{ds}{dx}$ ist ihm nicht $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, sondern nur lim. $\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x}$ u. s. w.

---

*) § LXI—LXIX.

Es ist ja gewifs, dafs dieser Darstellung gegenüber die Einwürfe, die gegen die verschwindenden Inkremente, mit denen Leibniz weiter rechnet, gegen die Nullen Eulers, deren Begriff L'Huilier nicht fassen kann [1]), die man bald in dem Zustande läfst, in dem man sie in der Rechnung einführte, bald wieder diesen Zustand verlassen heifst, fast zum Schweigen gebracht werden, und die Rechnung in dieser Form ihren Gang weiter gehen kann. —

Aber es geht die Leichtigkeit des Leibnizschen Algorithmus verloren, wenn nicht eher, als bis der Ausdruck Lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ fertig dasteht, die Rechnung fortgesetzt werden darf.

Dafs die Leibniz-Eulersche Methode schliefslich dieselben Resultate liefert, wie die seinige, erklärt sich L'Huilier fast auf dieselbe Art wie Berkeley durch die gegenseitige Ausgleichung der Fehler, die den Analysten, und zwar malgré lui, zu demselben Endergebnis führe, als wenn er von richtigen und nicht kontradiktorisch entgegengesetzten Principien ausgegangen wäre [2]).

So versteckt sich in dem Limes, dessen Begriff in den Vordergrund gestellt wird, nun die ganze metaphysische Schwierigkeit. Eine Lücke würde zwar auch dann bleiben, wenn bei der Aufnahme des Begriffs dieser Grenze nichts zu erinnern sich fände. Es ist ja eine Thatsache, dafs nicht alle Probleme der Integralrechnung im weiteren Sinne sich durch die Umkehrungen der Differentiationen lösen lassen. Das bestimmte Integral bliebe auch für L'Huilier noch zu erklären.

Aber abgesehen davon scheint ein Punkt auch bei L'Huilier unerledigt. — Es fehlt, um es mit einem Worte zu sagen, die genetische Definition des Limes. Sein Dasein ist ja klar erwiesen, aber nicht, wie er zu diesem Dasein gekommen. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ war ja zunächst ein Quotient, und gab an, wie oft Δx in Δy enthalten sei. Ist nun in dem Limes dieses Quotienten ganz und gar das Wesen des Quotienten abhanden gekommen? Macht nicht L'Huilier, wenn er zur Grenze übergeht, selbst den immensen Sprung von der Existenz zur Vernichtung? Ist der Limes ein Geschenk, von dem man nicht weifs, woher es kommt, oder ein Erarbeitetes? — Steht er da, wie etwa ein Preis im Wettkampf, den man nicht erlangt, sondern der nachträglich ohne Mühe von selbst in den Schofs fällt? —

Das ist der Haupteinwand, den man gegen L'Huilier erheben kann. —

Dann: es wäre doch ein Wunder, wenn der Leibnizsche Algorithmus den Analysten „malgré lui" stets zu richtigen Auflösungen geführt hätte. —

In dieser Beziehung erscheint die L'Huiliersche Fassung fast als ein Rückschritt gegenüber den scharfen Darstellungen von Maclaurin. —

4. Carnot.

Man kann die Abhandlung von Carnot [3]) über die Theorie der Infinitesimalrechnung an das Buch von L'Huilier insofern anschliefsen, als es sein Bestreben ist, das, was L'Huilier wie vor ihm Berkeley als eine Ursache der Richtigkeit der aus dem Leibnizschen Algorithmus hervorgehenden Resultate ansehen, nämlich das gegenseitige Ausgleichen der Fehler, zu einem Gewufsten und Gewollten zu machen. Weil es unbewufst, durch ein glückliches Ungefähr geschehe, weil es nicht

---

[1]) § LXVII. pag. 149., ebenso pag. 152.

[2]) § LXXIV.

[3]) Betrachtungen etc. von Carnot, übersetzt von J. K. F. Hauff.

aus den Principien mit Notwendigkeit hervorgehe, deshalb wurde ja der Rechnung der Charakter der Wissenschaft abgesprochen. — Verweilen wir bei Carnots Schlüssen länger und sehen wir, wie er an ein Beispiel seine Darstellungen anknüpft. —

Carnot vermeidet zunächst die endlichen Differenzen mit Δy und Δx zu bezeichnen und benennt sie in den geometrischen Beispielen mit den an den Anfang und das Ende der Linien gestellten Buchstaben. — Er sucht z. B. die Konstruktion der Tangente am Kreise, beziehungsweise der Subtangente *).

Betrachtet man zunächst MN (Fig. 5) als Seite eines eingeschriebenen Kreispolygons, so ist stets

$$\frac{MN}{NO} = \frac{TP}{y}$$

da aber $(y + NO)^2 = 2a(x + MO) - (x + MO)^2$ und wegen der Kreisgleichung auch

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

so ist

$$\frac{MO}{NO} = \frac{TP}{y} = \frac{2y + NO}{2a - 2x - MO.}$$

In dieser Gleichung ist aber, wenn ich die Tangente suche, so lange ein Fehler, als ich den Kreis noch als ein Polygon und so lange ich TP nicht als die Subtangente ansehe. Diese beiden Fehler gleichen sich dadurch aus, dafs ich rechts NO und MO wegwerfe, links TP als die Subtangente anerkenne. Dies ist aber nicht nur eine Annäherung zur Wahrheit, es handelt sich nicht um eine fortwährende Verkleinerung des Fehlers, sondern um ein völliges Hinwegthun desselben. — Dafs das Resultat richtig ist, darf aber nicht durch eine Verifikation vermittelst älterer Methoden, die aufserhalb dieses Kalküls liegen, bewiesen werden, sondern durch die Sache selbst. Dieser sachgemäfse Beweis liegt darin, dafs, so lange noch MO und NO als Gröfsen in der Rechnung erscheinen, auch TP noch nicht die Subtangente ist. —

Eine etwas andere Wendung der Auflösung lehrt das Nämliche.

Wenn M und R (Fig. 6) benachbarte, durch endliches Intervall getrennte, Kreispunkte sind, also T_1R Sekante ist, gilt streng

$$\frac{T_1P}{MP} = \frac{TP + T_1T}{MP} = \frac{MZ}{RZ}$$

und wie oben

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ}$$

also

$$TP + T_1T = y\,\frac{(2y + RZ)}{2a - 2x - MZ}$$

Die linke Seite enthält, wenn ich sie gleich TP setze, einen Irrtum, die rechte Seite ebenfalls, wenn ich RZ und MZ nicht annulliere. Beide Irrtümer heben sich auf. —

Wie ist aber in jedem Augenblicke das Bedenken zu heben, ob der Irrtum der einen Seite dem der anderen wirklich äquivalent sei, und ist das Herausfallen der Gröfsen T_1T, MZ, RZ ein plötzliches Fortnehmen endlicher Gröfsen oder das Ende eines allmählichen Vorgangs? —

Der erste Zweifel ist dann unberechtigt, wenn man, was in jedem Falle nötig, überzeugt ist, dafs beide Fehler identisch sind, und, da im Mathematischen die Identität stets als eine Folge des Kausalnexus erscheint, dafs der Fehler der einen Seite die Ursache des Fehlers der anderen Seite ist.

*) § 8. ff.

In Betreff der zweiten Frage entscheidet sich Carnot für das allmähliche Abnehmen. Die Inkremente, diese Hilfsgröfsen, waren willkürliche; darin, dafs sie dies sind, liegt die Vollmacht sie zu annullieren, und man mufs dies thun, um die Gleichungen, die so lange unvollkommene Gleichungen sind, als die Hilfsgröfsen endliche Werte haben, zu vollkommenen zu machen. Demnach ist die Rechnung mit Infinitesimalen so lange eine nicht beendete, wie lange diese Hilfsgröfsen noch darin sind. Wenn ich dy, dx noch in der Rechnung habe, gehören sie dem angebbaren (assignable) Unendlichen an; wenn ich aber zu dem letzten Werte derselben, zu 0 und $\frac{1}{0}$ übergehe, dem metaphysisch Unendlichen. Diese metaphysisch unendlich kleinen Gröfsen haben aber Verhältnisse, die ihnen nach dem Gesetz der Stetigkeit zukommen und müssen deshalb im Augenblicke des Verschwindens betrachtet werden*). Das Gesetz der Stetigkeit fordert, dafs z. B. für $\frac{MZ}{RZ}$ das Verhältnis der Subtangente zur Ordinate gesetzt wird.

Mithin ist der Einwand, dafs die Differentialien entweder Nullen oder wirkliche Gröfsen sind, hinfällig. Zunächst sind sie für Carnot willkürliche endliche Gröfsen. So lange sie als solche in den Gleichungen auftreten, sind die Gleichungen unvollkommene; sie werden zu vollkommenen, wenn sie von dieser Willkürlichkeit durch das Annullieren der eingeführten Gröfsen, das aber stets nach den Gesetzen der Stetigkeit erfolgen mufs, befreit werden.

Es ist die Verteidigung Carnots ein Schritt zu der Unbefangenheit des Leibnizschen Algorithmus zurück. Er hat nicht nötig, sich bei jedem Schritt der Rechnung auf lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu besinnen, wenn nur am Ende der Rechnung die eingeführten dy und dx durch das Auffinden ihres Verhältnisses sich herausheben. Seine Gedanken stehen mithin zwischen Leibniz (Euler) und der behutsamen Ängstlichkeit des L'Huilier in der Mitte.

Aber wir kommen wieder hier bei dem Gesetze der Kontinuität an.

Zudem ist die Schwierigkeit des Gedankens $\frac{0}{0}$ doch nicht gehoben. Sehen wir noch einmal das Beispiel an. $\frac{TP}{MP} = \frac{MO}{NO}$ war in Beziehung auf das Kreispolygon eine vollkommene, in Beziehung auf den Kreis eine unvollkommene Gleichung, ebenso $\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2a - 2x - MO}$. Also ist $\frac{TP}{MP} = \frac{2y + NO}{2a - 2x - MO}$ eine Gleichung mit denselben Eigenschaften. Das Tertium comparationis ist $\frac{MO}{NO}$ und durch dieses Tertium kommt allein die Gleichung zu Stande. Dieses $\frac{MO}{NO}$ wird $\frac{0}{0}$, das an sich, was Carnot nebenbei erwähnt, jeder Wert sein kann. Dafs ich aber durch das Gesetz der Stetigkeit genötigt gerade diesen Wert nehmen mufs, da ich doch den Durchgangspunkt nicht aufser Acht lassen darf, erlöst mich noch nicht von dieser Schwierigkeit des Quotienten $\frac{0}{0}$. —

Mit nur wenigen Worten berühre ich die Thätigkeit Lagrange's. Ihm hat der Differentialquotient ganz und gar den Charakter eines Quotienten zweier verschwindenden Gröfsen verloren. Er frägt, welches Gesetz befolgt wird, wenn man eine Funktion von x, deren Variabele x um h

*) cfr. §§ 42. 44. 45.

wächst, nach den Potenzen dieses Zuwachses h entwickelt. Den Koefficienten der ersten Potenz von h in dieser Entwickelung, seine erste Derivierte ($f^1(x)$) ist der Differentialquotient der Entdecker. — Zunächst kann ja das Unendliche in dieser Darstellung entbehrt werden. Aber es ist eine Eigenschaft an Stelle der Definition gesetzt, wie wenn man den Kreis als die Kurve definieren wollte, in der die Peripheriewinkel gleich sind. Es ist oft genug gezeigt worden, dafs diese Darstellung den Erweis, dafs jede Funktion sich in Reihen entwickeln läfst, voraussetzt und dafs somit ein Umweg gemacht wird über ein Zusammengesetztes zu einem Einfacheren. Für diese Studie kommt demnach Lagrange's Derivationsrechnung nicht in Betracht.

Ich glaube demnach ein Recht zu haben, was die Darlegungen der Mathematiker betrifft, mit dem zu schliefsen, was L'Huilier und Carnot für die Rechtfertigung der Infinitesimalrechnung gethan haben. Welche Einwürfe Berkeleys sind beantwortet worden, welche treten zurück, welche bleiben unerledigt? —

Was (ad 2) die Verletzung des Identitätsgesetzes betrifft, so haben L'Huilier und speciell Carnot das, was schon Leibniz andeutete, dafs es sich ja um einen Prozefs des Werdens handele, mehr ausgeführt. Es sind nach ihnen zwei Stadien in der Rechnung zu unterscheiden: am Anfange treten die Hilfsgröfsen als endliche ein, welche (Leibniz) die Infinitesimalen repräsentieren; wenn ich aber mit L'Huilier alsbald zur Grenze übergehe, oder mit Carnot am Ende der Rechnung den Prozefs dadurch abschliefse, dafs ich die Gleichungen, die zuerst für das betreffende Problem unvollkommene waren, zu vollkommenen mache, indem ich das metaphysisch Unendliche zur vollen Wirkung kommen lasse, so bin ich im zweiten Stadium der Rechnung, dem der Annullierung der als Hilfsgröfsen eingeführten Inkremente. Somit ist nach dieser Darstellung das Principium identitatis nicht anwendbar, wenn es sich um die Auffassung des Werdens handelt. — Am Ende der Abhandlung wird dieser Punkt nochmals berücksichtigt werden. —

Der Tadel Berkeleys (ad 3) trifft nicht die Fluxionstheorie Newtons und Maclaurins, da in dieser der Gedanke der Geschwindigkeit der primäre ist, die Inkremente erst durch die Geschwindigkeit, welche die mit sich selbst identische Bewegung ist, entstehen. Dieser Tadel tritt aber überhaupt zurück, da auch diejenigen Darstellungen, die sich nicht auf die Fluxionstheorie gründen, den Begriff der Geschwindigkeit nicht hervorheben. Ob er damit ganz abgethan, ist eine Frage, die untersucht werden mufs und die identisch mit der Frage ist, ob die Geschwindigkeit das an sich Frühere sei. — Das Bedenken ad 4, noch einmal verschärft durch L'Huilier, wird am gründlichsten durch Carnot besprochen. Der Rest der Ungenauigkeit hebt sich in den Endgleichungen nicht von ungefähr, sondern gewufst und mit Absicht, da die eine Ungenauigkeit in einem ursächlichen Znsammenhange mit der anderen steht, mit ihr identisch ist. —

Am schwersten wiegt das Bedenken ad 1, die Schwierigkeit, sich eine Quantität im Verschwinden, das gegenseitige Verhältnis zweier solcher Quantitäten, den Bruch $\frac{0}{0}$ selbst aber auch als eine Quantität vorzustellen. Das unendlichkleine o bei Newton, das als Multiplikator der Fluxionen die Momente erst schaffte, der Limes L'Huilier's, der angeblich nur eine Quantität, nicht mit der Natur des Quotienten behaftet, sein sollte, der Quotient $\frac{M0}{R0}$ bei Carnot, der als Tertium comparationis stillschweigend auch dann diente, als er schon eliminiert war, vermögen im letzten Grunde nicht das Bedenken zu heben.

Die gemeinsame Antwort ist die Berufung auf das Gesetz der Kontinuität. Mag auch L'Huilier diesen Übergang vermeiden wollen, er macht ihn selbst dennoch.

Auf diesem Gesetze der Kontinuität beruhen heute noch die Darstellungen.*) Mithin wird es angesagt sein, wenn auch nur zunächst, bei der Thatsache stehen zu bleiben, dafs die Mathematiker hier Halt machen, und zu fragen, ob dies Gesetz ein Princip sei, das also weiter hinein und tiefer hinab sich nicht begründen sondern nur anschauen lasse, und wenn dies der Fall, **wie** es angeschaut und wie eine Überzeugung von seiner beherrschenden Kraft gewonnen werde. —

IV. Die Begriffe des Kontinuierlichen und Discreten, des Extensiven und Intensiven bei den neueren Philosophen.

Diejenige Metaphysik, bei der zunächst eine Antwort auf die noch offene Frage zu suchen wäre, ist die Kants. Nach Leibniz hat kein Philosoph so energisch wie er nach der inneren Berechtigung, nach der Möglichkeit der einzelnen Wissenschaften geforscht. — Bei Fichtes Ichphilosophie und Schellings Identitätslehre würden wir vergeblich Aufschlüsse suchen. Es ist, als ob diese Ansätze die Welt zu verstehen es verschmähten, in wirkliche Probleme, zu denen Fachstudien gehören, hinabzusteigen und ihre Theorien an dem Prüfstein auch des Mathematischen zu bewahrheiten. — Die Synechologie Herbarts, eines Mathematikers unter den Philosophen, ist nicht zu übergehen. — Wird sich bei Hegel und seiner Schule eine genügende Aufklärung finden? Wie verhält sich Trendelenburg, der so ausführlich den Aufbau der mathematischen Kategorien bei den Früheren untersucht und inmitten seiner Kritik die Grundzüge einer einheitlichen Entwickelung wahrnehmen läfst, zu diesen Fragen? Wer unter all diesen hohen Herren hält es der Mühe für wert, sich der Details der hier noch bestehenden Schwierigkeiten wirklich anzunehmen? Die Philosophie soll doch die Wissenschaft der Principien sein. Es hinterläfst aber ein Unbefriedigtsein, wenn da, wo es gilt, sie als solche zu erkennen, sie selbst versagt. Die Philosophie verschuldet es selbst zum Teil, wenn man sich dann von ihr abwendet und sie als eine den anderen Wissenschaften „koordinierte“ betrachtet, die man ohne Schaden links liegen lassen könne, wenn klar denkende Mathematiker von ihr nichts wissen wollen und meinen, was die Mathematik nicht aufhelle, werde auch durch die Philosophie nicht einleuchtender. — Auf eine Auseinandersetzung über die Grundverschiedenheiten der Systeme können wir uns selbstverständlich nicht einlassen; es mufs genügen die Frage zu beantworten, wie nahe dem Verständnis die Entwickelung dieser verschiedenen Philosophien unser Problem bringt.

1. Kant, E. G. Fischer, Fries.

Kants Kritik der reinen Vernunft hält die Frage, wie in der Mathematik synthetische, unser Wissen erweiternde Urteile a priori möglich seien, für identisch mit der Frage nach Raum und Zeit. Diese sind ihm nicht Objekte des Erkennens, sondern als subjektive Anschauungen die Grundbedingungen und Principien aller Erkenntnis, die sich in jedem Objekte unserer Erkenntnis als rein subjektives Element wiederfinden.

Ein zweites Element im Erkennen sind die Formen der Vereinigung des Subjektes und Prädikates, die Kategorien der Quantität, Qualität, Relation, Modalität, in denen der Geist durch die synthetische Einheit der Apperception, d. h. indem er sich in dem Denkakte als einen und denselben weifs, die Vereinigung von Subjekt und Prädikat, das Urteil, vollziehe.

Diese Kategorien müssen sich aber auf die Erscheinungen, deren Grundformen ja Raum und Zeit waren, beziehen können. Dies geschieht, indem die Kategorien in die Zeit eingeführt werden.

*) R. Lipschitz, Differential und Integralrechnung. pag. 3.

Dieser Schematismus giebt (ich erwähne hier nur das zur Mathematik Gehörige) bei der Quantität die Zahl, bei der Qualität das Sein in der Zeit.

Wie die Kategorien nun zu gebrauchen sind, lehren die Grundsätze des reinen Verstandes und zwar in Beziehung auf das Mathematische der Grundsatz der Quantität (das Axiom der Anschauung), dafs alle Anschauungen extensive Gröfen, und der Grundsatz der Qualität (die Anticipation der Wahrnehmung), dafs alle Gröfsen der Wahrnehmung intensiv sind. —

Lassen wir alle Fragen, ob nach Kant die ganze Mathematik nicht nur ein immerhin interessantes Spiel unserer Gedanken, ob, was Pythagoras und Platon dachten, dafs die Zahl auch die Schönheit der Welt aufser uns bedinge, nicht ein Hirngespinnst sei, ob, um es präcis auszudrücken, Gott auch vor der Schöpfung des Menschen alles geordnet habe nach Mafs und Zahl: lassen wir dies bei Seite; fragen wir nur, ob diese Regeln uns weiter führen.

Warum giebt der Kantische Schematismus nur die Einführung der Kategorien in die Zeit? Führe ich sie nicht in den Raum ein, was berechtigt mich, a priorische Wahrheiten in Beziehung auf Linie, Fläche u. s. w. aufzustellen?

Wie definiert nun Kant weiter die Begriffe, um die es sich für uns handelt? —

„Eine extensive Gröfse nenne ich diejenige, in welcher die Vorstellung der Teile die Vorstellung des Ganzen möglich macht“ [1]).

„Die Gröfse, die nur als Einheit apprehendiert wird und in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation = 0 vorgestellt werden kann, nenne ich die intensive Gröfse“ [2]).

„Die Eigenschaft der Gröfsen, nach welcher an ihnen kein Teil der kleinstmögliche (kein Teil einfach) ist, heifst die Kontinuität derselben. — Dergleichen Gröfsen kann man auch fliefsende nennen, weil die Synthesis (der productiven Einbildungskraft) in ihrer Erzeugung ein Fortgang in der Zeit ist. — Diese Eigenschaft der Kontinuität kommt sowohl den extensiven als intensiven Gröfsen zu.“ [3])

Es giebt also Gröfsen, die kontinuierlich sind, die also aus Teilen bestehen, auf die also auch Rechnung angewandt werden kann (Kant mufs doch dies für möglich halten, da er ja die Anticipation der Wahrnehmung einen mathematischen Grundsatz nennt), ohne dafs sie im Raume und der Zeit zunächst angeschaut werden. Kant teilt sie allerdings dem Gebiete der subjectivsten Empfindung zu (Farbe, Wärme) kann aber doch nicht umhin, z. B. die Schwere unter diese intensiven Gröfsen auch zu rechnen [4]).

Es ist schwierig, sich vorzustellen, wie diese intensiven Gröfsen, die doch nach Kant der Anschauung entrückt sind, dennoch kontinuierlich sein können. Kommt nicht durch dieses „Fliefsen“ wieder die Anschauung des Raumes und der Zeit hinein, sind nicht diese intensiven Gröfsen gezwungen sich wieder in extensive umzusetzen? — Bedarf hier nicht Kant einer Weiterentwickelung seiner Gedanken? Immerhin aber, die Definition der intensiven Gröfse, des zunächst raum- und zeitlosen Grades, giebt uns einen Anhalt. Sie würde sich auf das verschwindende dy und dx sehr wohl anwenden lassen, obschon dieses blofse „Annähern zur Null“, durch welches er sie doch für Raum und Zeit retten zu wollen scheint, die Unsicherheit, die dem Differentialquotienten anhaftet, nicht ganz heben würde. Wir werden weiter unten sehen, dafs es geschehen ist, und bezeichnen hier deshalb diese Kantischen Definitionen als Bausteine, die benutzt werden konnten. —

---

[1]) Kritik der reinen Vernunft (zweite Auflage) pag. 203.

[2]) pag. 210.

[3]) pag. 211—213.

[4]) „Der Grad bezeichnet die Gröfse, deren Apprehension augenblicklich ist“.

Es ist beachtungswert, daſs Kant an einer weiteren Stelle, bei den dynamischen Grundsätzen und zwar bei der zweiten Analogie der Erfahrung, „daſs alle Veränderungen nach dem Gesetze der Verknüpfung der Ursache und Wirkung vor sich gehen“ pag. 232 und besonders pag. 253 ff. eine Betrachtung giebt, die vollkommen scharf das Problem der Infinitesimalrechnung bezeichnet. Die Stelle lautet: „Es frägt sich also, wie ein Ding aus einem Zustande = a in einen andern = b übergehe. Zwischen zween Augenblicken ist immer eine Zeit, und zwischen zwey Zuständen in denselben immer ein Unterschied, der eine Gröſse hat (denn alle Teile der Erscheinungen sind immer wiederum Gröſsen). Also geschieht jeder Übergang aus einem Zustande in den andern in einer Zeit, die zwischen zween Augenblicken enthalten ist, deren der erste den Zustand bestimmt, aus welchem das Ding herausgeht, der zweyte den, in welchen es gelangt. Beide also sind Grenzen der Zeit einer Veränderung, mithin des Zwischenzustandes zwischen beiden Zuständen und gehören als solche mit zu der ganzen Veränderung. Nun hat jede Veränderung eine Ursache, welche in der ganzen Zeit, in welcher jene vorgeht, ihre Causalität beweiset. Also bringt diese Ursache ihre Veränderung nicht plötzlich (auf einmal oder in einem Augenblicke) hervor, sondern in einer Zeit, so, daſs, wie die Zeit vom Anfangsaugenblicke a bis zu ihrer Vollendung in b wächst, auch die Gröſse der Realität (b — a) durch alle kleineren Grade, die zwischen dem ersten und letzten enthalten sind, erzeugt wird. Alle Veränderung ist also nur durch eine continuirliche Handlung der Causalität möglich, welche, sofern sie gleichförmig ist, ein Moment heiſst. Aus diesen Momenten besteht nicht die Veränderung, sondern wird dadurch erzeugt als ihre Wirkung. —

Das ist nun das Gesetz der Continuität aller Veränderung, dessen Grund dieser ist: „daſs weder die Zeit, noch auch die Erscheinung in der Zeit, aus Theilen besteht, die die kleinsten sind, und daſs doch der Zustand des Dinges bei seiner Veränderung durch alle diese Theile, als Elemente, zu seinem zweyten Zustande übergeht.“

Ob Kant bei dieser trefflichen Darlegung des Gesetzes an $f(x) = a$ und $f(x + \Delta x) = b$, speziell bei der Zeit an dt resp. dx gedacht hat, ist zu bezweifeln. Er entrückt ja auch, indem er dies Gesetz unter die dynamischen verweist, das Problem dem Gebiete der Mathematik und weist es der Physik zu, indem er diese beiden Wissenschaften vielmehr koordiniert, anstatt die eine als die andere aufnehmend, stützend und begründend zu betrachten. Von einer Kausalität in der Mathematik will er nichts wissen. Genauer aber kann kaum der Kern der Infinitesimalrechnung herausgeschält werden. —

Worin liegt aber die Erkenntnis dieses Gesetzes? In der Subjektivität der Zeit, in der Anticipation der eigenen Apprehension, (pag. 256). Wir werden mit dieser angeblichen Lösung den Objekten wieder ferner gestellt, nachdem wir kaum angefangen haben uns über die klare Aufstellung des Problemes zu freuen. —

Ein noch näheres Eingehen auf die in Frage stehenden Probleme ist mir bei Kant nicht vorgekommen. Sehen wir, was mit seiner Ansicht, daſs in Raum und Zeit etwas liege, das als ursprünglich sich aller Definition entziehe, was mit dieser Auffassung des Intensiven zwei durch seine Schule hindurchgegangene Männer, ein philosophisch durchgebildeter Mathematiker und ein im Mathematischen erfahrener Philosoph, angefangen haben.

Es war E. G. Fischer, der Verfasser von Jahrzehnte hindurch gebrauchten und geschätzten mathematischen Lehrbüchern, der den Gedanken der zunächst raum- und zeitlosen intensiven Gröſse und des Grades derselben auffasste und ihn zur Aufhellung des Dunkels, das dem Verständnis des Differentialquotienten als eines Bruches $\frac{0}{0}$ sich noch entgegenstellte, benutzte. Da Fischers Dar-

stellung diejenige ist, die nach meiner Meinung allein das Rätsel, das doch nicht für immer ein solches bleiben konnte [1]), der Lösung mindestens einen bedeutenden Schritt weiter entgegenführt, so verweile ich länger bei den Hauptgedanken derselben. Seine Auffassung steht für mich im Mittelpunkte; ich gestehe, dass ich gern dieselbe einem unverdienten Vergessen entziehen möchte. Deshalb wird es meine Aufgabe sein, zu zeigen, dafs dasjenige, was in den Meinungen früherer Autoren als bleibendes Gut sich ergab, durch Fischers Erklärung der Sache in ein deutlicheres Licht gestellt wird, sowie dafs auch dasjenige, was bei Späteren allgemein als bewährt anerkannt wird, seine Darlegung stütze. Denn die Wahrheit ist nur eine." [2])

Fischer hat die Frage, um die es sich handelt, lange Zeit erwogen. Sein letztes Wort hierüber differiert in der Hauptsache nicht von seiner über 20 Jahre früher publicierten Auffassung. [3]) Einige Ungenauigkeiten, wie z. B. dx u. dy, weil sie Grenzen der Linien seien, geradezu als Punkte zu bezeichnen, somit die Linien atomistisch als Aggregate zu denken, sind in den letzten Darstellungen vermieden. —

Das Intensive ist nach Fischer, der sich hierbei wesentlich auf Kant stützt, aber, was Kant nur „Annäherung zur Null" nennt, als zu Ende gebracht bezeichnet, an und für sich nicht anschaulich, da es in sich geschlossen der Extension ermangelt. —

Es giebt Gröfsen, wie die Wärme, die Lichtstärke, die Geschwindigkeit, die Kraft, die durchaus als intensiv aufgefafst werden müssen. So ist die letztere, die Geschwindigkeit, die intensive Gröfse der Bewegung [4]). Denn offenbar ist in jedem Punkte des Weges die Geschwindigkeit schon vorhanden; denn wäre sie es nicht, so könnte sie auch in keiner endlichen Zeit als vorhanden gedacht werden. — Sie kann aber in jedem Punkte der Zeit oder des Raumes gröfser oder kleiner sein; also müssen ihre Teile, ihre Grade, als in einander liegend betrachtet werden, obschon dieses Ineinanderliegen der unmittelbaren Anschaulichkeit, da es dem Raume und der Zeit nicht angehört, ermangelt. (Es ist eine Denknotwendigkeit und die Schwierigkeit liegt z. T. in der Sprache, da wir selbst mit dem Worte „ineinander" nicht aus der räumlichen Anschauung herauskommen.) Dies ist aber der wesentliche Charakter des Intensiven. Die extensive Gröfse ist nur das äufserliche Mafs desselben, wenn das Intensive aus sich heraustritt, gemessen bei der mit sich identisch bleibenden Geschwindigkeit nach der Länge des Weges, den das sich Bewegende in einer angenommenen Zeiteinheit zurücklegt, bei der sich verändernden Geschwindigkeit gemessen durch den Weg, den es zurücklegen würde, wenn die Geschwindigkeit mit sich identisch bliebe.

Stets also, wenn man denkt, dafs in einem verschwundenen Raumteile etwas vorstellbar sei, das in sich selbst wachsen und abnehmen kann, hat man den Begriff der intensiven Gröfse [5]).

---

[1]) Du Bois-Reymond (pag. 2) sagt: „Die Lösung des Räthsels, wenn sie mir gelang, ist, dafs es ein Räthsel ist und bleiben wird". Es giebt ja Dinge genug in der Welt, die Rätsel bleiben werden; sollte aber die Differentialrechnung nicht weiter kommen, als bis zu einem Stillstehen vor dem Differentialquotienten? —

[2]) Aus allgemeinen Gründen, deren Entwickelung mich über Gebühr hier aufhalten würde, kann ich mit dem Grundgedanken der Du-Bois'schen Schrift mich nicht befreunden, dafs beide Vorstellungsweisen, der Idealismus und der Empirismus, obschon durchaus verschieden (pag. 3), gleiches Anrecht haben, und dafs die Wahrheit in zweierlei Gestalt uns erscheint. —

[3]) Die Quellen sind: Untersuchung über den eigentlichen Sinn der Analysis. Berlin 1808. —
Lehrbuch der Elementar-Mathematik V. (Dazu die Anmerkungen.) Berlin 1835. —
Über das Unendlichkleine und die Atome. Zwei akademische Abhandlungen. Berlin 1831. —

[4]) Elementar-Mathematik. V. pag. 237.

[5]) Über das Unendlichkleine. §§ 8—23.

Diesen Begriff, für den es im Räumlichen und im Zeitlichen, ebenso wie für den der Kraft, eine unmittelbare **Anschauung** nie geben wird, sucht man zu fixieren durch die symbolische Bezeichnung dx und hat diese gewählt, damit man dx noch unter dem Begriffe des x, dem es bei der allmählichen kontinuierlichen Vernichtung dessen, was in x der Extension angehört, doch angehörig bleibt, denken kann. Dieses dx hat, extensiv gedacht, den Wert 0, und zwar genau, aber nicht absolut, sondern nur im Verhältnis gegen jeden anderen extensiven Wert von x, und dies dx heifst sodann eine unendlichkleine Gröfse, sofern man nämlich, vermöge des Begriffes von x und seines Zusammenhanges mit anderen Gröfsen, demselben eine intensive Gröfse beilegt.

Die **absolute** (in diesem Unterscheiden zwischen absoluter und relativer Null stimmt Fischer ganz mit Leibniz überein) Null vernichtet den Begriff von x; die **relative** Null, das dx, nur die Extension von x. Demnach ist $x + dx = x$, denn dx ist ja extensiv $= 0$. Demnach verschwinden höhere Potenzen von dx gegen niedere nach dem auf diese Art deutlicher werdenden Schema:

$$Mdx^p + Vdx^{p+r} = Mdx^p\,(1 + \frac{V}{M}dx^r) = Mdx^p.$$

So bleiben z. B. bei dem Dreiecke, das durch Parallelverschiebung der einen Seite der Extension nach in drei ineinanderliegende Punkte zusammenschrumpft, die **Richtungen** der Seiten, mithin die Winkel, mithin die Seitenverhältnisse dieselben; die Sekante bekommt die Richtung der Tangente, obschon die Sehne verschwunden; die unendlichkleine Pyramidenspitze wird der Form nach eine der ganzen ähnliche sein.

Da also die intensive Gröfse der Teile, die aber selbst wieder intensive Gröfsen sind, nicht ermangeln und (vgl. Kant) das Merkmal des Kontinuierlichen an sich haben kann, so ist $\frac{dy}{dx}$ sehr wohl als Quotient denkbar, obschon Zähler und Nenner **extensiv** $= 0$ sind. **Der Differentialquotient ist mithin der Exponent zweier intensiven Gröfsen.** —

In den letzten Zeilen liegt für mich, sowie ich jetzt denke, der Schlüssel zur Sache, die Hebung des noch übrigen Bedenkens. — Möge es mir beschieden sein, das Urteil kompetenter Richter darüber zu vernehmen, ob diese Grundanschauung Fischers, die ich soeben reproduziert habe, wesentliche Mängel hat! —

Als Quotient, also als Zähler, unterscheidet sich $\frac{dy}{dx}$, wenn er nicht etwa in dem einzigen Falle $y = ax$ konstant bleibt, in nichts von einer Funktion von x. Auf ihn kann wieder graphische Darstellung angewendet werden, er läfst sich differenzieren u. s. w.

Betrachtet man dx als Einheit, so ist dy selbst die Zahl für die gemessene intensive Gröfse u. s. w.

Aus diesem Begriffe des Intensiven folgt auch, dafs es das *πρότερον τῇ φύσει*, das Wirkende, dafs das Extensive seine Folge ist.

Frägt man daher speziell bei der Gleichung zwischen C, T und S (celeritas, tempus, spatium), welche sachlich ursprünglicher sei, ob $CT = S$ oder $C = \frac{S}{T}$, so ist die Antwort klar. Auch hier ist die Multiplikation früher*) als die Division und $CT = S$ sagt aus, dafs die mit sich identisch seiende Bewegung, wenn sie als das aus sich heraustretende Intensive das Extensive hervorbringt, den Raum schafft.

---

*) Elementar-Mathematik V. pag. 242.

So klar auch Fries[1]) ebenfalls auf Kantischer Grundlage die Anschauung des Stetigen aufbaut, als einer solchen Gröfse, von der kein angebbarer Teil als der letzte gefafst werden darf, so dafs also auch der Differential nie als ein gegebenes Ganze angesehen werden kann, da ein gegebener unendlich kleiner Teil ein Widerspruch in sich selbst ist[2]), so energisch er gegen Langsdorfs endliche Teilbarkeit opponiert: so ist er doch nicht im Stande gewesen, sich in dem rein mathematischen Teile seines Werkes mit Fischer, dessen Schriften er wohl kennt, zu dem Gedanken der intensiven Gröfse als der Quelle des Extensiven zu bekennen. Es scheint mir, als ob die Negation, die dem Worte nach in dem Unendlichkleinen liegt, ihn an den Ausdruck „das Unendlichkleine ist das Unvollendbare“ festschmiede. Dafs keine Ziffer, kein von Menschenhand geschriebener Decimalbruch die Grenze des dx erreichen wird, ist ja klar. Aber dem Gedanken den Abschlufs des Prozesses versagen, heifst das Wesen der Differentialrechnung aufheben[3]). Hierin überholt der Gedanke die Empirie; der Übergang zur Grenze (mit dem Worte „Grenzübergang“ kann ich mich nicht befreunden) ist das Aufhören alles Extensiven.

Im zweiten Teile seines Werkes dagegen, in der reinen Bewegungslehre, dringt Fries darauf, mit der Anschauung der einfachsten Art der Bewegung, der geradlinigen, gleichförmigen, mit sich identischen als einer intensiven Gröfse von bestimmtem Grade zu beginnen und hier finden sich mustergiltige Festsetzungen von bleibendem Werte[4]).

2. Hegel und seine Schule.

Obschon die Philosophie Hegels die gewaltigsten Anläufe macht, das gesamte Gebiet der Wissenschaften zu umspannen, aller einzelnen Disciplinen Fundamente zu finden, nicht nur Grundgedanken als treibende Impulse zu geben, sondern auch die Lösungen besonderer Schwierigkeiten zu finden: so ist doch das, was Hegel selbst und nach ihm Constantin Frantz[5]) über die Rechnungen mit Infinitesimalen beibringen, dem früher Geleisteten gegenüber nur eine Verdunkelung der Sache zu nennen. Dies Urteil bedarf einer Begründung. —

Hegel verwirft eine von der Reihenentwickelung unabhängige Deutung des Differentialquotienten und verurteilt eigentlich alles, was Leibniz, Newton, Euler bereits für die Sicherstellung der Rechnung gethan haben[6]), er hält den Gedanken einer Endgeschwindigkeit für unmöglich[7]) und sucht schliefslich das Wesen des Differenzierens in dem Erniedrigen des Potenzexponenten, was man „in einer halben Stunde“ sehr gut erlernen könne[8]). Somit hat er keine Kenntnis von den

[1]) J. F. Fries, die mathematische Naturphilosophie. Heidelberg 1822.
[2]) pag. 276.
[3]) Die Idee des dauernd, ohne Abschlufs, verschwindenden dx geht auch mir „wider den Mann“. cfr. Du Bois-Reymond. pag. 141.
[4]) pag. 416.
[5]) Logik I. pag. 297—379. — Constantin Frantz, die Philosophie der Mathematik. 1842.
[6]) Logik I. pag. 306. „Die Vorstellungen von Inkrementen, Zuwachs, Zunahme des x um dx oder i sind als das in den Methoden vorhandene Grundübel anzusehen“. Ebenso pag. 326. „Man hat sich in diesem Felde Vieles als Beweis, vornehmlich unter der Beihülfe des Übels des Unendlich-Kleinen gefallen lassen“.
[7]) pag. 353.
[8]) pag. 341. „Die Operation des Depotenzierens einer Gleichung giebt ein Resultat, welches an ihm selbst nicht mehr eine Gleichung (!) sondern ein Verhältnifs ist; dies Verhältnifs ist der Gegenstand der eigentlichen Differentialrechnung“.

Fällen, bei denen die Funktion zunächst nicht nach Potenzen der Variabelen fortschreitet, weder von der Differenzierung der trigonometrischen noch der anderen transcendenten Funktionen. Am Ende weicht er der Beantwortung der Hauptfrage ganz aus, indem er die Methode Lagranges für die normale erklärt [1]).

Jeder nur einigermafsen mit der Natur des Problems Bekannte wird bei der Lektüre der 82 Seiten, auf denen Hegel über Differentialrechnung spricht, sich gestehen müssen, dafs hier genug sachliche Irrtümer, von denen ich nur einige erwähnt habe, vorliegen und dafs dem abwehrenden Urteil Schnuses beizupflichten ist [2]).

Nicht günstiger wird man für die Ergebnisse der dialektischen Methode durch die „Philosophie der Mathematik" von Frantz gestimmt. Es ist das Eigentümliche der Terminologie der Hegelschen Schule, ihres fortwährend angestrebten, aber oft so unharmonisch tönenden Dreiklangs, als eines Schemas, in das Gott und Welt hineingezwängt werden sollen, dafs dem Leser nicht nur die Anschauung, sondern jeder Gedanke ausgeht. —

Wie weit entfernen sich doch von besonnener Nüchternheit folgende Expektorationen! —

Über die Ellipse äufsert sich Frantz [3]): „Insofern sie als die Rückkehr aus dem Aufsersichsein die Negation des Aufsersich überhaupt ist, bezieht sie sich auf einen Punkt innerhalb ihrer, an dem sich das Mafs der Richtung durch die Radien Vectoren innerhalb ihrer selbst darstellt, welche Beziehung aber, als in sich selbst unterschieden, vielmehr Beziehung auf zwei Punkte ist, die — Brennpunkte".

Oder über die Gleichung der Tangente an der Ellipse [4]): „Jede Coordinate ist im Quadrate verdoppelt, das eine y bezieht sich in dem andern Faktor auf sich. Dadurch, dafs der eine Faktor starr, die lebendige Beziehung auf den andern aufgehoben wird, wird die Gleichung der Kurve zur Gleichung der Tangente $\frac{xx^1}{a^2} + \frac{yy^1}{b^2} = 1$".

Das ist keine Spekulation innerhalb der Sache, sondern ein vollständiges Verlassen des der Mathematik eigentümlichen Grundes und Bodens, das Hin- und Hergaukeln eines Dämmerungsfalters.

Nach diesen Proben kann man nicht viel von den weiteren Leistungen für die Erklärung des Differentialquotienten hoffen.

In der That, obschon es ersichtlich ist, dafs Frantz sich nicht zu der Lagrangeschen Theorie flüchtet, dafs er mit mehr Kenntnis von dem Probleme die Aufhellung des Lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sucht, so erlauben doch seine Mittel ihm nicht dem Ziele näher zu kommen.

Er sagt: [5]) „Im Verhältnis sind zwei Gröfsen durcheinander und durch eine dritte bestimmt. Durch und für einander bestimmt zu sein ist als ihre Qualität gesetzt. Damit diese Qualität in reiner Bestimmung für sich selbst sei, müssen die Seiten nur sein, was sie für einander sind." (Dies ist nach meiner Meinung nichts als die Regel, dafs man jeden Bruch kürzen kann.) „Darum ist ihre Grofsheit, wodurch sie unmittelbar jede einzelne für sich etwas wären, aufzuheben; sie sollen nur im Verhältnisse gelten; aufserhalb desselben gelten sie als Gröfsen — und sie sind nichts

[1]) pag. 345.
[2]) Cournot-Schnuse, Elementarbuch etc. (in der Vorrede).
[3]) pag. 150.
[4]) pag. 157.
[5]) pag. 165.

anderes — nicht, d. h. sie sind Null. In der Gleichung $y = ax + b$ ist y und x für sich als Null zu setzen, damit das reine Verhältnis erscheine $\frac{dy}{dx} = a$, der Differentialquotient, der auch das ab solute Verhältnis genannt werden kann."

Hegel und Frantz lieben es, die Kategorie der Qualität in die Mathematik hineinzubringen, wohin sie zunächst nicht gehört. Wer wollte zwar leugnen, dafs gerade, krumm, verzögert, beschleunigt u. s. w. auch Qualitäten bezeichnen? — Aber es ist doch nicht zu vergessen, dafs mathematische Betrachtung nur da eintritt, wo die Qualität sich in die Quantität umsetzt. — Das ist der eine Einwurf. —

Der andere ist der, dafs Frantz, wenn er sagt, „die Grofsheit ist aufzuheben, damit die Qualität in reiner Bestimmung für sich sei" und somit x aus ax nicht herausdividiert, sondern ohne weiteres wegwirft, der Sache auch nicht um einen Schritt näher kommt. Das mag eine Regel für ax sein, für $y = x^2$ versagt sie bereits.

So müssen wir vollständig unbefriedigt von dieser „Philosophie der Mathematik" Abschied nehmen. — Auch die Brochüre G. Engels „die dialektische Methode und die mathematische Naturanschauung" lässt ein Eingehen auf das fragliche Problem ganz vermifsen.

Den Grundzügen seiner Methode nach als der „logischen Entwickelung", der Heraussetzung des in der „Anlage" vorhandenen „Widerspruchs", welcher in der „höheren Stufe" gelöst wird, ist hier K. Fischer anzureihen [1]). Auf drei Seiten beschäftigt sich K. Fischer speciell mit der Differentialrechnung [2]). Dafs es auf das Begreifen der stetigen Gröfsenveränderung hier ankommt, ist als Problem richtig bestimmt, ebenso, dafs sich das Kontinuum nur durch das Werden, nicht durch Zusammensetzung erkennen lässt. — Nun aber folgt eine sachliche Unrichtigkeit. Es heifst: „hier ist 0 der Ausdruck eines Gröfsenverhältnifses, dessen Seiten im Verschwinden begriffen sind, aber in diesem Zustand der Nichtgröfse sich zu einander verhalten, d. h. sie ist der Ausdruck der werdenden Gröfse [3])."

Nämlich: das Gröfsenverhältnis ist $\frac{dy}{dx}$; Zähler und Nenner, seine Seiten verschwinden allerdings, aber 0 ist nicht der Ausdruck seiner selbst. Das Verhältnis ist im Allgemeinen nicht Null, sondern eine Funktion der Unbekannten; es kann wohl Null werden z. B. bei dem Maximum oder Minimum. Somit wird auch das letzte Wort „die Nichtgröfse ist als Gröfsenverhältnifs gedacht" nicht verständlich.

Obschon bei K. Fischer die Entwickelung der intensiven Gröfse (§ 99) dieser nur zu kurzen Berücksichtigung der Differentialrechnung vorangeht, so kann ich doch trotz der richtigen Bezeichnung des Problems ein tieferes Eingehen auf das Wesen des Differentialquotienten bei ihm nicht entdecken. —

Von Hegel ausgehend und sich in Hegelschen Terminologien oft noch bewegend, aber die Ergebnifse der Hegelschen Metaphysik, was das Mathematische anbetrifft, bekämpfend, zeigt die Darstellung von H. Schwarz, deren Grundzüge hier folgen mögen [4]), tieferes und den Kern der Sache treffendes Verständnis. Das Quantum mufs nach ihm in seiner Vollendung die beiden Momente des Diskreten und Kontinuierlichen in sich haben. Wird in dem vollendeten Quantum, der Funktion, die Kontinuität zur Darstellung gebracht, so geschieht dies durch Differentiation, wird

---

[1]) System der Logik und Metaphysik. Heidelberg 1865. pag. 189—191.
[2]) pag. 292—294.
[3]) pag. 293.
[4]) H. Schwarz, Versuch einer Philosophie der Mathematik. Halle 1853.

untersucht, wie es sich zur Diskretion bewegt, so ist dies das Problem der Integralrechnung [1]). (Ich lafse dahingestellt, ob dieses die durchschlagenden Kriterien sind). Insofern nun, um bei der Entwickelung der Differentiation zunächst stehen zu bleiben, die Funktion eine Aufeinanderfolge zweier Reihen (es handle sich um die Funktion einer Variabelen) von auf einander bezogenen Zahlenwerten giebt, ist der Trieb der Bewegung von den früheren Paaren zu den späteren noch nicht hindurchgebrochen; es mufs also eine Beziehung entwickelt werden, welche jeden Verflufsakt ebenso für sich als beim Übergange in den andern charakterisiert, also ein wirkliches Verflufsmoment ist; es mufs, was an sich ein Widerspruch, dieser Flufs als diskrete Zahlenbestimmtheit gefafst werden. Es ist dies derselbe Widerspruch, der der Teilbarkeit der Linie oder der Eins bis in die Unendlichkeit entspricht. Das Zufällige und Ungenügende, das dem blofsen Nähern anhaftet, mufs herauseliminiert werden. Dieses Verengen des Intervalles ist aber möglich durch die Entwickelung des

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ im Allgemeinen } = f^1(x) + \varrho$$

auf der rechten Seite. Ist z. B. $y = x^2$, so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, und denkt man sich Δx alle Zwischenstufen annehmend bis zum gänzlichen Verschwinden, so bilden die entsprechenden $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eine convergierende Reihe, deren letztes real vorhandenes Glied, die Grenze, von der Willkür irgend eines Sprunges befreit ist. Im allgemeinen verschwindet ϱ mit Δx. Man hat dann nur die Bewegung überhaupt als die Tendenz über die eigne Bestimmtheit hinauszugehen, aber diese Bestimmtheit nicht durchbrechend, dieselbe Tendenz, die in der Idee des Punktes liegt, welcher obgleich für sich bestehend dennoch die Bewegung über sich hinaus voraussetzt [2]). Solcher Tendenz entspricht im Gegenbilde, in der Kurve, die gerade Linie, die das „schlechthinige Aufsersichkommen" des Punktes ist. So enthält die Grenze zugleich die Bestimmung der Tangente, als einer Richtung, die nicht zum Durchbruche gekommen, nichtsdestoweniger aber als „aufgehobenes Moment" existiert.

So wie diese Darstellung der Entwickelung von lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dem Denken genügt, obschon ein Eingehen auf die Natur des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vermifst wird, so auch die Rechtfertigung des Leibnizschen Algorithmus [3]). Erscheint im Calcül $\frac{dy}{dx} = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$ durch die Grenzbetrachtung als Princip gerechtfertigt, so darf die specielle Wissenschaft nur auf diesem Principe weiter bauen, wenn sie sich jeden Augenblick dieser Grundlage versichern kann. Also ist die Rechnung mit Differentialien, die Trennung des Zählers und Nenners in $\frac{dy}{dx}$ möglich; es ist nicht nötig, $\frac{dy}{dx}$ als reine „Marke" zu betrachten, wenn stets diejenigen Reflexionen, die zur Herleitung des Differentialquotienten dienten, festgehalten werden. Da aber diese Differentialien nur etwas bedeuten können, wenn sie im Verhältnifse auftreten, so wird eine Rückkehr zu dem Fundamente stets möglich sein, wenn die Gleichung in Beziehung auf die Differentialien homogen bleibt, d. h. wenn sie identisch ist mit der Bestimmung ihres direkten Verhältnifses. Dies ist die Ursache, dafs dx^2 gegen dx vernachläfsigt werden mufs, oder es ist vielmehr nur eine andere Aussprache der Forderung der Homogenität [3]). Die Inkremente können also ihre Selbständigkeit bewahren, denn, setzt Schwarz

[1]) pag. 19 u. 20.
[2]) pag. 62—71.
[3]) pag. 86.

etwas apodiktisch hinzu, „es ist kein Grund vorhanden, diese Selbständigkeit in dem Momente, wo der Prozefs zum Abschlufs kommt, als aufhörend zu denken“. —

Es handelt sich also nicht um eine Abnahme schlechthin, sondern um das sich dabei herausstellende Verhältnis, um die Bestimmtheit der Geschwindigkeiten oder Intensitäten dieses der Null Entgegeneilens[1]). Diese Intensitäten werden vergleichbar sein.

Es ist eigentümlich — und um des noch Folgenden willen mufs ich es hervorheben, — dafs die Schwarzesche Darstellung ohne die Hineinziehung der Anschauung der Bewegung die präcise Fassung des Differentialquotienten nicht fertig bekommt, dafs sie zugesteht, dafs der Gedanke der Bewegung den anscheinenden Widerspruch löst, sowie, dafs auch sie sich des Begriffes des Intensiven bedient. Die E. G. Fischerschen Arbeiten scheint der Verfasser nicht zu kennen; wenigstens erwähnt er sie nicht. —

3. Resultat; v. Berger, Trendelenburg, Herbart, Lotze.

Ich habe für die Feststellung desjenigen Begriffes vom Differential und Differentialquotienten, dem ich bleibenden Wert zuschreibe, genug Zeugnisse. Daher halte ich es für angemessen, was sich bis jetzt herausgestellt hat, zu fixieren und alsdann noch darzuthun, dafs dies Fixierte mit den Anschauungen späterer Philosophen, denen wohl niemand die Anerkennung des besonnensten Forschens vorenthalten dürfte, übereinstimmt. —

Als Resultat des Vorhergehenden und als allgemeine Grundanschauung ergiebt sich mir Folgendes.

Diejenigen Teile der Mathematik, in denen es auf die Untersuchungen des Werdens ankommt, fallen mehr oder weniger in das Gebiet, das man wohl früher allgemeine Phoronomie nannte, hinein.

Auch in der synthetischen Geometrie haben die Epoche machenden Leistungen J. Steiners die gestaltende, schöpferische Bewegung als den treibenden Faktor zur Geltung kommen lassen. Es ist eingewendet worden und wird eingewendet werden, dafs, wenn Phoronomie als die Wissenschaft gefafst werden soll, die sich mit den Beziehungen von Bewegungen, also auch mit der Zeit, beschäftigt, mit dieser Zeit ein ungehöriges Element hineinkomme, welches die analytische Geometrie, die Differential- und Integralrechnung nicht im mindesten etwas angehe. Von dieser Seite ist ja die ganze Auffassung der Fluxionstheorie Newtons angegriffen, als machten Newton und Maclaurin die Lehre von den Funktionen zur Mechanik, die sie zunächst nicht sei. Vielmehr sei die abstrakte Rechnung das Erste, die analytische Geometrie eine Anwendung derselben auf den Raum, mit der Bewegung träte man in das Gebiet der Mechanik als in ein ganz specielles ein. — Ich halte diese Auffassung nicht für die ganz richtige.

Wer das Vorhergehende gelesen, wird gefunden haben, dafs selbst die abstraktesten Darstellungen, dafs auch die Ausführungen von Leibnitz Ausdrücke, die der Bewegung und der Zeit entstammen, nicht umhin können zu gebrauchen[2]).

Man durchmustere die Lehrbücher der Infinitesimalrechnung und sehe nach, ob eins derselben ganz und gar derjenigen Terminologie, welche der Phoronomie angehört, entraten kann. Das Verschwinden der Inkremente, das frühere Verschwinden der Infinitesimalen höherer Ordnungen, das raschere Steigen der Kurven, die simultanen Zunahmen, der Stillstand der Funktionen, das schnellere Konvergieren einer Reihe, die Bezeichnung von $f^1(x)$ als Mafs der Schnelligkeit, ja als des Grundes oder der Ursache der endlichen Veränderungen, die Drehung der Sekante, das Sinken oder Steigen des Punktes auf der Tangente: dies sind ja alles Redewendungen, die

[1]) pag. 88. 90. u. 91.
[2]) cfr. oben pag. 8. u. 10.

ohne Anschauung von Bewegung und Zeit sinnlos wären. Man wende nicht ein, es seien bildliche Ausdrücke; der bildliche Ausdruck ist gar nicht möglich, wenn nicht das Bild einen inneren Zusammenhang mit der Sache hat. Es sind einige Citate nötig, damit diese Behauptung nicht unbegründet in der Luft schwebe. Ich entnahm sie einer Reihe beliebiger gerade zur Hand liegender Lehrbücher*). —

Wo ist aber, wenn die Bewegung, mithin auch implicite die Zeit in jedem Differentialquotienten enthalten sein soll, dieselbe in $\frac{dy}{dx}$ zu finden? Worin besteht das Gemeinsame zwischen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy}{dt}$?

Eine Parallelisierung dieser beiden Formen wird nicht möglich sein, ohne dafs wir uns auf die Grundvorstellungen des Messens und Zählens besinnen.

$\frac{dy}{dx}$ ist lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; auch bei den Differentialen soll die Natur des Quotienten nicht verloren gehen; denken wir also zunächst an endliche extensive Gröfsen, stellen wir uns Koordinatendifferenzen vor. Wir lösen Δy und Δx aus ihrem Simultansein für einen Augenblick aus und erhalten etwa erstens den Quotienten dadurch, dafs wir Δx auf Δy (oder umgekehrt) abtragen, also das mit sich identische Δx wiederholen und Δy dadurch entstehen lassen. Das Resultat ist die Zahl, die aber, wollen wir das Allgemeine nicht aufgeben (sie kann ja gebrochen, selbst irrational sein), als ein Diskret-kontinuierliches gedacht werden mufs, als dessen einfachstes Gegenbild die absolut dichte, in gleichen Abteilungen getrennte Linie (aber auch jedes andere durch gleichmäfsige Bewegung entstandene räumliche Quantum) erscheint. Dies Abzählen, diese Erkenntnis der Zahl involviert aber die Zeit. Die Einheit, die wir uns bei dieser Zahl denken, ist eine vollkommen willkürliche, kann auch Δx sein, in welchem Falle Δy selbst die Mafszahl wird. —

Wir können uns zweitens, da jede Multiplikation sowohl dadurch vorgestellt werden kann, dafs die eine Gröfse so oft durch Wiederholung ihrer Bildung an einander gereiht wird, als in der anderen Einheiten sind (die so eben beschriebene Entstehung des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die rückgängige Auflösung dieses Falles), als auch dadurch, dafs jede Einheit des Multiplikators zum Quantum des Multiplikandus wird, mit der Umkehrung dieses zweiten Vorganges das $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ auch also entstanden denken, dafs Δx bereits gemessen sei und nun Δy auf einmal in soviele gleiche Stücke zersplittere, als die dem Δx äquivalente Mafszahl Einheiten hat. — Dadurch wird eine mit Δy gleichartige Gröfse, etwa Länge, gewonnen, es scheint so, als wäre bei dieser mehr räumlichen Entstehung der Zahl von keiner Zeit die Rede. Aber näher betrachtet erhalte ich in dieses Resultat durchaus keine Einsicht, wenn ich es nicht mit Anwendung des bei Δx gebrauchten Mafses wiederum in eine Zahl verwandele. Es kommt also auch hier auf denselben Prozefs hinaus und das Ganze ist nur um eine Station zurückgedrängt.

Immer liegt die Anschauung zu Grunde, dafs ein Kontinuierliches durch ein anderes Kontinuierliches als ein Diskontinuierliches mit Hilfe der Zahl begriffen wird, dafs eine in sich gleich-

---

*) Cournot-Schnuse, pag. 24, 30, 31, 49, 50, 120.
Schlömilch, Compendium der Analysis, Einleitung über die Steigungsverhältnisse.
Sturm, Cours d'Analyse I. pag. 11 u. 42.
Minding, Differentialrechnung. pag. 5, 26, 39, 62.
Lipschitz, Analysis II. pag. 17 u. 20.

mäfsige Bewegung ein Eins, das mit sich identisch bleibt, wiederholend schafft und dadurch ein Quantum erzeugt. Diese Bewegung bringt aber in uns das Verständnis der Zeit hervor.

Das letzte Eins bleibt ohne weitere Aufschlüsse; wir verstehen das Quantum nur durch die Zahl.

Ist denn nun die Anschauung der Entstehung von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wirklich eine andere? Es ist nur der nichts bedeutende Unterschied, dafs diejenige Art, die ich bei $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als die zweite bezeichnete, bei $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ gewöhnlich sich mehr in den Vordergrund stellt, weil wir gewohnt sind, die Zeit uns in dem Bilde der ganzen Zahl zu denken und das Δy in gleiche Stücke zersplittern zu lassen.

Aber die erste Vorstellung ist ebenso berechtigt. — Da, wie schon mehrfach erwähnt, die Zeit uns nur durch das gleichmäfsige Erzeugen einer mit sich identischen Eins verständlich wird, (wir können diese Eins als das Verschiedenste, als ein Stück Linie, ein Quadrat, einen Kreissektor, einen Bogen etc. denken), so hindert uns nichts, die Einheit in Δt, auch sogar das Δt selbst durch dieselbe Bewegung, die Δy erzeugte, geschaffen zu denken.

Ich halte dies für kein ad hoc ausgedachtes Kunststück, sondern für in dem innern Wesen des Gedankens begründet. — Dann aber ist der Begriff des $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ ganz derselbe wie der, welchen wir durch Abtragen des Δx auf Δy gewannen.

Dafs aber diese Vorstellung in dem inneren Wesen des Gedankens liege, dafür noch folgende Motive.

Jede Funktion, mag sie nun graphisch dargestellt werden oder nicht, ist ein Gesetz zwischen fortschreitenden Bewegungen, am einfachsten ersichtlich an $y = f(x)$, aber auch ebenso an $f(x, y, z)$, wenn $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Eine unter diesen Bewegungen wird als die in sich identische (das konstante dx) zum Erkennen der anderen benützt. — Denn wir erkennen das Veränderliche nur durch das in sich Gleiche vermittelst der Zahl.

Der Zug der Kurve wird dadurch begriffen, dafs die Ordinate, sich parallel bleibend, sich gleichmäfsig verschiebt und ein Punkt auf ihr nach dem bestimmten Gesetze der Funktion sich bewegt, oder indem sich ein Radius gleichmäfsig dreht und der Punkt auf ihm entlang gleitet, oder ein kegelförmiger Raum wird verstanden, indem eine Kreisfläche aus sich heraustretend während dieser Bewegung sich selbst verjüngt*).

Die Funktion sagt nichts anderes aus als dies: Bewegen sich die unabhängigen Variabelen, so bewegen sich die abhängigen nach einem bestimmten Gesetz.

So ist die Grundlage der Funktionentheorie die Phoronomie. Diese Phoronomie ist Geometrie des Mafses, wenn ich von der im speciellsten Sinne als Zeit bezeichneten Bewegung, an ihre Einheiten, an die Sekunden und Stunden, die der einzig als gleichmäfsig erkannten Bewegung der Erde um ihre Achse entstammen, nicht denke, sondern irgend eine gleichmäfsige Bewegung hypothetisch zu Grunde lege; diese Phoronomie wird Mechanik, wenn ich diese empirische Zeit mit Δt oder dt als Variabele setze. Der Gedanke aber und infolge dessen die Rechnung bleibt dieselbe, mag ich $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{dy}{dt}$ bestimmen.

Daher mag wegen dieses gemeinsamen Bodens ein Beispiel zu weiterer Erläuterung dienen. Bei dem freien Falle der Körper existiert eine Endgeschwindigkeit; man kann sie in der Atwood-

*) cfr. über diese Ansicht der Sache auch Fresenius, die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. 1868.

schen Fallmaschine vermittelst des Auslösens des beschleunigenden Gewichtes empirisch beobachten, wenn man anderweitig nicht überzeugt sein sollte. Es besteht diese Geschwindigkeit des Augenblicks aber bei jeder Funktion. Ja, diese Geschwindigkeit ist nicht nur der Gröfse nach wirklich vorhanden, sondern auch ihrer Richtung nach; ich wüfste sonst nicht, wie der Tropfen am Mühlrade in der Richtung der Tangente abgeschleudert werden könnte, wie man zu sagen vermöchte, dafs der Punkt der Kurve die Richtung der Tangente hat. Ein anderes Beispiel, das Herbart treffend anführt, ist: wird eine Saite, während sie tönt, gestimmt, so hat sie stets einen Ton, obwohl er nicht dauert. (Herbarts Werke IV. pag. 241.) — Aber es müssen eben diese Geschwindigkeiten, diese Richtungen als intendierte, als intensive Dinge verstanden werden, d. h. immer als solche, die, obgleich sie real da sind, sich nur entfalten würden, wenn von dem betreffenden Momente ab die Bewegung mit sich identisch bliebe.

Die Differentialrechnung bringt aber dies zur Erscheinung, wenn der Gedanke bis zum Anfange zurückgeht (resp. bei der rückwärts gehenden Betrachtung bis zum Aufhören des Δx und Δy), wenn in

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x) + \varrho \quad .$$

die kontinuierlich abnehmende Reihe, die durch die Werte des ϱ dargestellt wird, bis zum Verschwinden des ϱ sich vollendet und somit Δy und Δx den Charakter des Extensiven verlieren und den Abschlufs erhalten, der sie nur noch als rein intensive Gröfsen, als dx und dy hinterläfst, für die weder Zeit noch Raum übrig blieb, sich in Wirklichkeit umzusetzen und (bei Δy) sich selbst zu verändern. — In diesem Fortsetzen der abnehmenden Reihe bis zum letzten Gliede, bis zum Verhältnisse der reinen Intensitäten liegt das Gesetz der Kontinuität, auf das sich jede Darstellung der Infinitesimalrechnung beruft.

Mit dieser Anschauung der Sache, die also dem Wesentlichen nach ihren Ursprung den E. G. Fischerschen Arbeiten verdankt, befinde ich mich aber in Übereinstimmung mit den Grundgedanken derjenigen metaphysischen Forschungen, die tiefere Einsicht in die betreffenden Probleme zeigen. —

Zunächst nenne ich J. E. von Berger, den Astronomen und Philosophen, welcher die Anschauung der Bewegung, die selbst aus der Aktivität des idealen Princips hervorgehend in einer inneren und unsichtbaren Kraft des Daseins ihre Wurzel hat, als die allgemeinste, das Verständnis des Werdens eröffnende hervorhebt*). In der Bewegung sind, wie er fortwährend betont, Raum und Zeit untrennbar in einander eingebildet und mit einander verwachsen, die Zeit ist in ihr das innere ideale Moment, der Raum ihre äufsere unmittelbare Erscheinung, also, dafs das Verhältnis beider zu einander nie absolut, sondern wieder nur im Verhältnis mehrerer Bewegungen unter einander bestimmbar ist. Die Zeit ist ideal an sich, bleibt als solche ewig verborgen und wird daher nur durch Beobachtung von räumlichen Gröfsen, als den unmittelbar mefsbaren, bestimmt werden können. Mithin setzt ihre Bestimmung eine gleichförmige Bewegung voraus, worin der Raum, der beschrieben wird, der Zeit proportional sei. —

Diese mit sich identische Bewegung ist als die erste und einfachste Idee der Bewegung überhaupt zu fassen, ohne welche keine Bestimmung anderer ungleichförmiger möglich ist. Dies ist aber eine intensive Gröfse und Vorstehendem nach ist die Gültigkeit einer Mathematik der intensiven Gröfsen wohl entschieden, wenn gleich die unmittelbare Sphäre der Gröfsenbestimmung immer das Extensum bleiben wird. In dem Begriff der lebendigen Naturgröfse sind diese beiden

*) v. Berger, Allgemeine Grundzüge der Wissenschaft. (1817 u. 21.), I. pag. 259. und II. pag. 52 ff., sowie 58 ff.

Momente stets vereinigt: sie ist intensiv, dem in ihr fortwirkenden Princip ihres Wesens nach —, extensiv, sofern sie zugleich äufserlich im Raume erscheint. Als intensiv ist sie zeitlos, ideales Princip, welches die räumliche Gestalt bildet. So hat die mathematische Naturwissenschaft überall werdende Gröfsen zu bestimmen. —

Der Grad als die innere Tension dieses wirkenden Princips ist an sich einfach und ohne Teile (hiermit kann v. Berger nur die Teile im Extensiven meinen, wie sogleich aus dem Folgenden hervorgeht), aber die Pulsation, der Wechsel des Grades, der jedesmalige bestimmte Grad wird in entsprechenden Raumveränderungen als in seiner Verkörperung gemessen werden können. —

Weil nun solche Tensionen mit einander in Wechselwirkung stehen, so werden auch ihre Veränderungen zusammenhängen, eine wird eine Funktion der anderen sein, als ihre Gefährtin und Auslegerin. Diese korrespondierenden Veränderungen, die im Allgemeinen nach dem Gesetze der Stetigkeit neben einander herlaufen, finden sich in jedem Punkte; deshalb hat man es mit den Anfängen und Grenzen dieser Verhältnisse zu thun, weil sie überall, mithin auch im Momente ihres Entstehens, bestimmt werden sollen. Dies ist die Aufgabe der Differentialrechnung. —

Soweit v. Berger. — Seine Schrift kam mir erst zu Gesichte, nachdem ich E. G. Fischers Ansichten kennen gelernt; ich freute mich der Bestätigung. —

Den Gedanken von Bergers, dafs nur die Bewegung uns Raum und Zeit verstehen läfst, hat bekanntlich Trendelenburg aufgenommen und ihm eine noch durchgreifendere Bedeutung vindiciert[1]). — Das Ziel aller Philosophie ist ihm, den in der Welt verleiblichten göttlichen Gedanken durch Reproduktion zu erkennen und somit das Ideale im Realen zu finden. Zwei Grundprincipien sind es, die diese Nachbildung ermöglichen, der Zweck und die Bewegung, welche in das menschliche Denken aufgenommen das Sein demselben unterwerfen. Im letzten Grunde entsprechen diesen beiden die göttliche Idee und die ihr dienende That, wie aus dem Ganzen der Logischen Untersuchungen und insbesondere aus dem letzten Abschnitte wohl erkennbar, obschon Trendelenburg damit zurückhält, dies letzte Wort an jeder Stelle dem Leser aufzudrängen und die Wurzeln seiner Überzeugungen allenthalben blofszulegen. —

Bei unseren mathematischen Betrachtungen haben wir es nur mit dem in der Entwickelung des Erkennens früheren Princip, der Bewegung, zu thun. Die objektive Bewegung in den Dingen wird vom Geiste reproduziert durch ihr subjektives Gegenbild, die konstruktive Bewegung, durch die wir erst Zeit und Raum begreifen, da sie als einfache und ursprüngliche That des Denkens der Anschauung von Raum und Zeit vorangeht[2]). —

Man hat gegen diese Ansicht Einwendungen genug erhoben[3]). Die Bewegung, sagt man, möge wohl eine Grundanschauung sein; aber man sträubt sich gegen ihre primäre, das Verstehen von Raum und Zeit erst ermöglichende Bedeutung. —

Ich lasse den Streit hier auf sich beruhen; — ob diese Blätter implicite einen Beitrag zur Entscheidung liefern können, möge der kundige Leser selbst beurteilen. — Scheint mir doch derselbe wesentlich daher zu stammen, dafs Metaphysisches und Psychologisches, wie oft, so auch hier nicht scharf genug geschieden werden. Trendelenburg meint doch gewifs nicht, dafs dann erst ein Menschenkind zur Raumanschauung komme, wenn es die erste Hälfte der Logischen Untersuchungen studiert habe. — Es ist ein Unterschied, ob ich die Principien der Mathematik und Physik be-

[1]) Logische Untersuchungen. Dritte Auflage. Leipzig, 1870. I. pag. 141 ff.

[2]) L. U. I. pag. 68; pag. 221 ff.

[3]) Baumann, Raum und Zeit. II. pag. 673.
J. C. Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete u. s. w. Zürich. 1870. pag. 29 ff.

greifen will, oder die Geschichte der auch durch die Thätigkeit der Sinne bedingten Entwickelung der Raumempfindungen verfolge. —

Zunächst hebt Trendelenburg hervor[1]), was bereits erwähnt wurde (pag. 5 u. 21), aber hier nochmals betont werden mag, dafs, da die Bewegung das Ursprünglichste ist, auf sie das Principium identitatis nicht angewendet werden könne. Das Identitätsgesetz tritt erst in Kraft, wenn ein erkanntes Sein sich als solches behauptet; es geht das Gewordene an, nicht das Werden. Die Anschauung der Bewegung darf man nicht mit den Eleaten zerlegen in ein Sein und Nichtsein. — Die Polemik Ueberwegs (System der Logik (1865), pag. 178) ändert in dieser Auffassung nichts. Trendelenburg sagte: „der Punkt ist der erste Träger des Widerspruchs, der in der Bewegung, sobald die darin enthaltenen Elemente zerlegt wurden, hervortrat, d. h. so lange die Bewegung, wie bei Hegel und Herbart, für einen Widerspruch gilt"; er zerlegte also selbst die Bewegung nicht, die er ja oft genug für einfach erklärt, sondern er opponierte gerade gegen die Zerlegung.

So findet auch von hier aus das Bedenken Berkeleys seine Erledigung. Wir betrachten mit vollem Rechte zunächst Δx als endlich und lassen es dann verschwinden und zu dx werden. —

Die weitere Entwickelung des Princips der konstruktiven Bewegung zeigt nun bei Trendelenburg, wie sie Raum und Zeit erkennen lasse, im Raume die Figur entwerfe, durch die Zeit die Zahl, somit die kontinuierliche und diskrete Gröfse verstehen lehre, die Begriffe des Mafses, der Mafszahl und des Verhältnifses bilde[2]). Die Bewegung ist im Ursprunge zunächst intensiv, das äufsere Produkt derselben die extensive Gröfse[3]).

Dies ist in gröfster Kürze summiert das Ergebnis der Entwickelung der mathematischen Kategorien.

Bei der Ableitung der Begriffe des Intensiven und Extensiven wäre die Stelle gewesen, an der die L. U. auf das Problem der Differentialrechnung hätten eingehen können. Es fehlt eine solche nähere Berücksichtigung der Sache. Des Kritischen ist viel; die Auseinandersetzung mit den Philosophien Kants, Herbarts, Hegels nehmen dem Aufbaue des Positiven den Raum; bei den elementaren Lehren der Mathematik wird wohl verweilt, weitere Probleme werden nur genannt. — Dafs Trendelenburg dies als einen Mangel erkannte, möge eine Stelle aus einem vor mir liegenden Briefe vom 30. September 1862 zeigen. Es heifst dort: „Einige Bemerkungen sind (in der zweiten Auflage der L. U.) in Bezug auf die konstruktive Bewegung hinzugekommen; aber ich mufs es den eingehenden Mathematikern überlassen, die Principien weiterzuführen. Ich mufste mich begnügen, das Ganze in Gliederung und Begrenzung schärfer herauszuarbeiten".

Nur an wenigen Stellen d. L. U. geschieht der Differentialrechnung Erwähnung[4]), besonders da, wo es Trendelenburg darauf ankommt zu zeigen, dafs die blofse Empirie nicht im Stande sei, die Thatsache der reinen Mathematik zu erklären, weder die Bruchrechnung, noch das Irrationale, noch das Identische, noch das Unendlichkleine oder Unendlichgrofse. „Über die Erfahrung hinausgehend, welche allenthalben Begrenztes darbietet, stellen beide (das Unendlichkleine und Unendlichgrofse) keine Grenze dar, sondern drücken das nur gedachte Ergebniss eines ohne Hemmung fortgehenden, Gröfsen erzeugenden Processes, einer fortgehenden, stetig zunehmenden und stetig abnehmenden Bewegung aus. Das mathematisch Unendliche ist im Procefs begriffen." Ebenso: „Woher sollte aus der Erfahrung die Differentialrechnung stammen, die in den Funktionen das Wachsen und Ab-

[1]) L. U. I. pag. 182. 276; II. 175.
[2]) L. U. I. Abschnitt VII und VIII. Zusammengefafst ist die Entwickelung nochmals in II. pag. 164.
[3]) L. U. I. pag. 297—300.
[4]) L. U. I. pag. 273. 288. 295. 312.

nehmen der werdenden Gröfsen belauscht und die Geheimnisse ihrer Erzeugung durch Vorstellungen, wie das Unendlichkleine und -grofse an Gesetze bindet?"

Über das Intensive und Extensive finden sich in den L. U. eine Anzahl von längeren Erörterungen[1]), (besonders bei der Auseinandersetzung mit Hegel), deren Inhalt folgender ist. —

Die intensive Gröfse ist stets die wirkende Thätigkeit, die extensive das Produkt. Beide stehen demnach in Wechselwirkung, und weisen auf einander hin, die Ausdehnung auf die ergänzende Kraft und umgekehrt. — Ohne die extensive wäre die intensive eine qualitas occulta, jene ohne diese eine ausgegossene Vielheit ohne Einheit des Ursprunges. —

Es wäre überflüssig zu erörtern, dafs keiner von diesen aus der Grundanschauung der konstruktiven Bewegung hervorgehenden Sätze dem oben gegebenen Begriffe des Differentialquotienten als eines Verhältnisses zwischen zwei Intensitäten widerspricht, sondern dafs sie sämtlich ihn bestätigen.

Nur in einem Punkte der L. U. glaube ich eine Inkonsequenz zu bemerken. — Trendelenburgs Definition der Geschwindigkeit scheint mir nicht mit seinem Grundprincip, auch nicht mit seiner Betonung des Identischen[2]) übereinzustimmen. Anstatt die Geschwindigkeit als die mit sich identische Bewegung zu definieren und dieselbe also als ein Ursprüngliches und Erstes festzuhalten, definiert sie Trendelenburg, und zwar hierin nicht in Übereinstimmung mit v. Berger, als den Quotienten $\frac{S}{T}$. Ich mufs dies für einen Irrtum halten, der den Gegnern eine Waffe in die Hand giebt, der das dritte der Berkeley'schen Bedenken wieder aufleben lassen würde. —

Denke ich durch die Bewegung den Raum, oder im Allgemeinen das Extensive, entstanden, und ist das Identische an sich früher als das Veränderliche, so ist auch $C . T = S$ früher als die Folgerung $C = \frac{S}{T}$. Aber das Identische geht voran, ebenso wie die Eins dem Vielfachen, das Gerade dem Gekrümmten[3]). Demgemäfs steht auch hier der Gedanke der Multiplikation vor dem der Division, wie ja auch der Gedanke der Addition den der Subtraktion möglich macht. — Oben (pag. 26.) war bereits auf diesen Punkt aufmerksam gemacht, der aber hier nochmals besprochen werden mufste. —

Mit $C = \frac{S}{T}$ als Definition kommt man nicht zur Einsicht in die Natur des Differentialquotienten. Kant, für den Raum und Zeit das Erste sind, mufste so definieren, Trendelenburg, für den die Bewegung das Erste, nicht. Kant kann deshalb auch bei seiner Definition des Intensiven nicht die blofse „Annäherung an die Null" loswerden, er kann den Gedanken nicht in das Raumlose, bis zum Ende des Prozesses, zurückzwingen, das Gesetz der Kontinuität bis zu Ende befolgen. — Die betreffende Stelle der L. U. ist bei der Polemik gegen Herbarts Synechologie zu finden[4]). Es gehört dieses Kapitel zu den schwierigsten metaphysischen Betrachtungen, zumal, da Herbart sowohl als Trendelenburg den Raum entstehen lassen, des Gemeinsamen nicht wenig ist.

Zu meinem Zwecke würde eine Rekonstruktion der Ansichten Herbarts über den intelligibeln Raum nichts helfen, da ich ja über das Ganze bereits entschieden bin. Ich habe es nicht fertig bringen können, den Gedanken des Stetigen aus der Reihe der „Bilder", dem „Aneinander" zu

---

[1]) L. U. I. pag. 297. 299. 308.
[2]) L. U. I. 286.
[3]) L. U. I. pag. 246 ff.
[4]) L. U. I. pag. 183—215.

erzeugen, das Diskontinuierliche mit Hilfe des „unvollkommenen Zusammen" und des „Bruchtheiles des Aneinander" loszuwerden. —

Aber bei dieser Definition der Geschwindigkeit scheint mir die Darstellung Herbarts und noch mehr seines Commentators Hartenstein nicht in den einzelnen Ausdrücken verurteilenswert. Warum sollte denn immer, wenn auch der Grundgedanke einer Metaphysik nicht zu halten, jedes Einzelne weggeworfen werden müssen? Ebenso wenig, als wie der richtige Grundgedanke schon an sich für eine unangreifbare Stellung jedes besonderen Satzes der Ausführung bürgt. — Es ist schwer sämtliche Konsequenzen eines Gedankens in jedem Momente zu überschauen.

Der Ausdruck, der Trendelenburg [1]) zum Anstofs gereicht, ist, dafs die Bewegung eine Wiederholung der Geschwindigkeit sei. — Ich vermag es nicht in diese Verurteilung einzustimmen.

Es müssen zwei Dinge auseinandergehalten werden. — Die intensive Gröfse, die Geschwindigkeit, als die mit sich identische Bewegung ist keine absolut unveränderliche Gröfse, eine für alle Zeit feststehende Einheit; sie kann sich von Ort zu Ort ändern. Ist bei linearen Bewegungen der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für einen Punkt $x_1 y_1 = \frac{3}{2}$, für einen späteren Punkt $x_2\ y_2 = \frac{5}{2}$, so verhalten sich diese Intensitäten wie 3 : 5. Mithin kann in diesem Sinne schon davon die Rede sein, dafs in der Bewegung ein Vervielfachen der Geschwindigkeit liege. —

Dieses meinen aber weder Herbart noch Hartenstein an den betreffenden Stellen [2]). — Sie denken an die Geschwindigkeit, die als intensive Gröfse die extensive hervorbringt, an das C, welches mit dt (oder wenn die Identität bleibt, mit T) multipliziert dx (S) erzeugt. — Dies behauptet insbesondere Hartenstein ausdrücklich und, ohne alle Definitionen der Schule als die mich befriedigenden zu erklären, stimme ich aus dem oben angeführten Grunde, dafs man mit der Definition $\frac{S}{T} = C$ dem ganzen Grundgedanken der ursprünglichen Bewegung wieder untreu werde und in das kantische Gefängnis der ursprünglichen Anschauungen von Raum und Zeit wieder hineingerate, mit dem Satze, dafs $C\ T = S$ den primären Vorgang, „das Intensive schafft das Extensive," am deutlichsten entspreche, überein.

Mit einigen in die tiefsten Beziehungen hinabreichenden Worten Lotze's [3]), die den in diesem letzten Abschnitte behandelten Grundgedanken nahestehen und darlegen mögen, wie desto erfreuender die Übereinstimmung der Denker ist, je mehr von der Oberfläche ab die Forschungen gehen, möchte ich schliefsen.

„Jede Zahl ist daher eine intensive Einheit, ein bestimmter Werth, der durch Vergleichung mit anderen nicht construirt werden kann, sondern seine bestimmten Verhältnisse gegen diese andern eben aus sich selbst erzeugt."

„Es gelten Zahlen bei Bestimmungen, die an Anderm sind. Diese sind unbegrenzte, jeder Theilung und Summirung fähige Unendlichkeiten der Vorstellung und haben kein immanentes Mafs, das als Einheit gelten könnte. Sie sind daher nur unter sich vergleichbar nach den Gröfsen, die man ihnen giebt; sieht man eine davon als Einheit an, so sind die andern Funktionen derselben.

---

[1]) L. U. I. pag. 212 ff.

[2]) Herbarts Werke (1851). IV. pag. 299 ff. — Hartenstein, Metaphysik. pag. 410. — „So bezieht sich die Zeit als Multiplicator des einfachen Erfolges der Geschwindigkeit auf ihn als ihren Multiplicandus; das Produkt aus beiden ist der durchlaufene Raum".

[3]) Lotze, Metaphysik (1841). pag. 59. — ebenso pag. 203.

Aber diese Einheit, da
Meinung gelten, die ni
ihrer Theile betrachten,
gilt; bis man stillsteht u
kann durch Vergleichun
grofs ist die Eins? —
Gröfse, die man jedem
stimmungen, so unterli
hat, ist daher eine ext
was ein immanentes M

Es existiert ein i
schaffen. Die Leibnizs
tischen Bewegung, der
die Nullen Eulers, die
nots, der Grenzbegriff i
man an sich nicht ken

Somit ist die Diffe
vorgeschlagen worden,
das dem Sein nach Frü
indem wir das Geword

Dafs alle metaph
begegnen, hiermit gelös
Studien anzuerkennen
Darstellungen der Meth

